Universidad de Chile
Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 1

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo
Ayudante: Claudio Carrasco
Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

1.- Sea $X \neq \phi$ y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que d es métrica, si y solo si, para todo $a, b, c \in X$, las condiciones $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$ y $d(a,b) \leq d(c,a) + d(c,b)$ son satisfechas.

Respuesta: Si asumimos que d es métrica, la primera condición se satisface por definición. La segunda se sigue por la desigualdad triangular y la simetría:

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = d(c,a) + d(b,c).$$

Para la otra implicancia, necesitamos probar que d es métrica. La simetría se sigue de la desigualdad dada. En efecto, tomando a $c = b \in X$, y $A \in X$ arbitrarios, se tiene que,

$$d(a,b) \leq d(b,a) + d(c,c)$$

Por hipótesis, $d(c,c) = 0$, por tanto, $d(a,b) \leq d(b,a)$. Invirtiendo los roles de a y b, se muestra que $d(b,a) \leq d(a,b)$. Dado que d es una función real valuada, la tricotomía de los números reales nos permite concluir que $d(a,b) = d(b,a)$.
Por simetría, se tiene que para todo $a, b, c \in X$,

$$d(a,b) \leq d(c,a) + d(c,b) = d(a,c) + d(c,b).$$

Por último, la postividad de d es consencuencia de las dos propiedades anteriores [1]:

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y) \implies d(x,y) \geq 0$$

2.- Sea (X,d) un espacio métrico y supongamos que existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ inyectiva. [2] Muestre que $(a,b) \to d_1(a,b) = d(f(a), f(b))$ es una métrica en $\mathbb{R}$. Concluya que $(a,b) \to |e^{e^a} - e^{e^b}|$ es una métrica en $\mathbb{R}$.

Respuesta: Veremos **(EM1)**:

[1] Notamos que la positividad de una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede obtener como consecuencia de la desigualdad triangular, la simetría y de la propiedad $d(x,x) = 0$.

[2] No siempre existen funciones inyectivas de $\mathbb{R}$ a un conjunto arbitrario X. Por ejemplo, si $X = \mathbb{N}$, se puede demostrar que ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva.

Si $d_1(x,y) = 0$ se tiene que

$$d_1(x,y) = 0 \Rightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y),$$

esto último se debe al hecho de que d es una distancia sobre X. Por otro lado, como f es inyectiva se tiene que

$$d_1(x,y) = 0 \Rightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Ahora, si $x = y$ se tiene que

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow d_1(x,y) = 0.$$

Veremos **(EM2)**: Como d es distancia sabemos que $d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x))$ y esta identidad es equivalente a $d_1(x,y) = d_1(y,x)$.

Finalmente, veremos **(EM3)**:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= d(f(x), f(y)) \\ &\leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) \\ &\leq d_1(x,z) + d_2(z,y) \end{aligned}$$

La segunda parte, basta notar que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^{e^x}$, es inyectiva.

3.- En el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, demuestre que

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$$

define una métrica en $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Respuesta: Primero, debemos asegurarnos que d esté bien definida. En efecto, la función $h(t) := |f(t) - g(t)|$ es continua en el intervalo $[0,1]$ por ser composición de funciones continuas en ese intervalo, y por tanto, es integrable en el intervalo $[0,1]$. [3] Así, $d(f,g) = \int_0^1 h(t)dt < \infty$.
Veremos **(EM1)**: Si $f = g$, entonces

$$d(f,g) = d(f,f) = \int_0^1 |f(t) - f(t)|dt = 0.$$

Por otro lado, supongamos que $d(f,g) = 0$, es decir,

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt = 0$$

Lo siguiente ya lo hemos hecho en otros cursos, y siempre es bueno recordarlo:
Definamos $h(t) := |f(t) - g(t)|, t \in [0,1]$, y supongamos por contradicción que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$. Esto es, $h(t_0) > 0$, ya que h es mayor o igual a 0. Por continuidad, debe existir un intervalo en el cual h es siempre positiva. Es decir, debe existir $\delta > 0$ tal que $h(t) > 0$, para todo

[3] Ver libro de Spivak, sección Derivadas e integrales, Teorema 3.

$t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.
Luego,

$$\begin{aligned} d(f,g) = \int_0^1 h(t)\,dt &= \int_0^{t_0-\delta} h(t)\,dt + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h(t)\,dt + \int_{t_0+\delta}^1 h(t)\,dt \\ &\geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h(t)\,dt \\ &> 0 \end{aligned}$$

Contradicción. Así, $f = g$.
Para **(EM2)**, es directa del hecho que $|x| = |-x|$. Por último, para **(EM3)**, tenemos que para todo $f, g, h \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$ y $t \in [0,1]$, se tiene que,

$$|f(t) - h(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|$$

Integrando de 0 y a 1, se obtiene la desigualdad triangular. Por lo tanto, d es una métrica.[4]

4.- Explique porqué las siguientes asignaciones no corresponden a métricas:

a) En $\mathbb{R}$ la asignación $d(a,b) := (a-b)^2$.

Respuesta: Falla la desigualdad triangular. En efecto, se tiene que,

$$4 = d(1,-1) > d(1,0) + d(0,-1) = 2$$

b) Sea $X \neq \phi$, con $x_0 \in X$. El conjunto $\mathcal{F}(X)$ de las funciones real valuadas definidas en X con la asignación $d(f,g) := |f(x_0) - g(x_0)|$.

Respuesta: Esta sí satisface la desigualdad triangular, sin embargo, falla en que $d(f,g) = 0$, si y solo si, $f = g$. En efecto, podemos tomar $X = \mathbb{R}$, $x_0 = \pi$, $f(x) = x$ y $g(x) = \pi$. Note que, $d(f,g) = |f(\pi) - g(\pi)| = |\pi - \pi| = 0$, y f es distinta de g en casi todos los puntos.

c) En el conjunto $\mathcal{R}[a,b] := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \in B_{\mathbb{R}}([a,b]) : f \text{ es Riemman integrable}\}$ con la asignación $d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt$, donde $B_{\mathbb{R}}([a,b])$ es el conjunto de funciones definidas en $[a,b]$ que son acotadas.

Respuesta: Tome $[a,b] = [0,1]$. La función f dada por $f(\frac{1}{2}) = 1$ y que es nula en cualquier otro caso, integra cero, y por ende, $d(f,0) = 0$. Sin embargo, $f \neq 0$.

d) En el conjunto $S = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ con la asignación $d(((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})) = |a_{2023} - b_{2023}|$.

Respuesta: Tome las sucesiones $a_n = n$ y $b_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{2023\}$ y $b_{2023} = 2023$. Entonces, $d(((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})) = 0$, pero $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5.- Demuestre que $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio métrico discreto, cuando se le dota con la métrica inducida por $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Muestre que $d(1, A) = 0$.

***Respuesta*:** Por demostrar que todo elemento de A es un punto aislado. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $x_n = \frac{n+1}{n}$, un elemento arbitrario de A. Definimos $r_n := \frac{1}{n(n+1)}$. Notamos que $x_{n+1} \notin B(x_n, r_n)$, pues,

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{n(n+1)},$$

[4]De hecho, la asignación $f \to \int_0^1 |f(t)|dt$ define una norma en el $\mathbb{R}$- espacio vectorial $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$, y d sería la métrica inducida por esta. En general, la asignación $f \to \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$ define una norma, para $p \geq 1$. La desigualdad triangular para $p > 1$ no es tan directa como en el caso $p = 1$.

y de igual forma, $x_{n-1} \notin B(x_n, r_n)$, pues,

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n(n+1)}$$

.
Se puede mostrar (por ejemplo, por inducción), que la sucesión $\{\frac{n+1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.
Supongamos por contradicción que existe $x_m \in B(x_n, r_n)$. Si $m < n$, entonces $m \leq n-1$, y por ende, $x_m \geq x_{n-1}$. Luego, $|x_m - x_n| = x_m - x_n < x_{n-1} - x_n = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n(n+1)}$. Por tanto, $x_m \notin B(x_n, r_n)$.
Contradicción. De manera análoga, se muestra que $x_m \notin B(x_n, r_n)$, para $m > n$.
Por lo tanto, necesariamente $m = n$, y $B(x_n, r_n) \cap S = \{x_n\}$.
Por definición,

$$d(1, S) = \text{ínf}\{|1 - \frac{n+1}{n}| : n \in \mathbb{N}\} = \text{ínf}\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

6.- En el espacio métrico $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de funciones continuas definidas en $[0,1]$, con la distancia $d(f,g) = \text{máx}_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$.

Sea

$$S := \{h \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : e^t \leq h(t) \leq e,\ t \in [0,1]\}$$

Calcule $d(f, S)$, donde $f(t) := \cos(t), t \in [0,1]$.
Sugerencia: Dibuje.

***Respuesta*:** Por definición se tiene que

$$d(f, S) = \inf_{h\in S} \max_{t\in[0,1]} |\cos(t) - h(t)|.$$

Afirmamos que,

$$\max_{t\in[0,1]} |\cos(t) - h(t)| = e - \cos(1)$$

para cualquier $h \in S$.
Por un lado, sabemos que la función $t \to \cos(t)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0,1]$, por tener derivada negativa en ese intervalo. Luego, $\cos(t) \geq \cos(1), \forall t \in [0,1]$.
Así, para todo $h \in S$,

$$h(t) - \cos(t) \leq h(t) - \cos(1),\ t \in [0,1].$$

Note que, como $h \in S$, se tiene que $h(t) - \cos(t) \geq 0$, por lo que, $|h(t) - \cos(t)| \leq h(t) - \cos(1) \leq e - \cos(1)$.
Tomando máximo sobre t, $\text{máx}_{t\in[0,1]} |\cos(t) - h(t)| \leq e - \cos(1)$.
Por otro lado, cualquier elemento de S, satisface que $h(1) = e$, ya que, $e^1 \leq h(1) \leq e$.
Por tanto,

$$e - \cos(1) = |e - \cos(1)| = |h(1) - \cos(1)| \in \{|\cos(t) - h(t)| : t \in [0,1]\}$$

.

Por definición de máximo, tendremos que $\text{máx}_{t\in[0,1]} |\cos(t) - h(t)| \geq e - \cos(1)$. Por lo tanto, independiente de la elección de $h \in S$, se tiene que $\text{máx}_{t\in[0,1]} |\cos(t) - h(t)| = e - \cos(1)$. Tomando ínfimo sobre h, se concluye que $d(\cos(\cdot), S) = e - \cos(1)$.