Universidad de Chile

Facultad de Ciencias

Análisis real | Ayudantía 1

Profesor de cátedra: Gonzalo Robledo

Ayudante: Claudio Carrasco

Contacto: claudio.carrasco.g@ug.uchile.cl

1.- Sea $X \neq \phi$ y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que d es métrica, si y solo si, para todo $a, b, c \in X$, las condiciones $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$ y $d(a,b) \leq d(c,a) + d(c,b)$ son satisfechas.

2.- Sea (X, d) un espacio métrico y supongamos que existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ inyectiva. [1] Muestre que $(a,b) \to d_1(a,b) = d(f(a), f(b))$ es una métrica en $\mathbb{R}$. Concluya que $(a,b) \to |e^{e^{a}} - e^{e^{b}}|$ es una métrica en $\mathbb{R}$.

3.- En el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, demuestre que

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$$

define una métrica en $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

4.- Explique porqué las siguientes asignaciones no corresponden a métricas:

a) En $\mathbb{R}$ la asignación $d(a,b) := (a-b)^2$.

b) Sea $X \neq \phi$, con $x_0 \in X$. El conjunto $\mathcal{F}(X)$ de las funciones real valuadas definidas en X con la asignación $d(f,g) := |f(x_0) - g(x_0)|$.

c) En el conjunto $\mathcal{R}[a,b] := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \in B_{\mathbb{R}}([a,b]) : f$ es Riemman integrable$\}$ con la asignación $d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$, donde $B_{\mathbb{R}}([a,b])$ es el conjunto de funciones definidas en $[a,b]$ que son acotadas.

5.- Demuestre que $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio métrico, cuando se le dota con la métrica inducida por $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Muestre que $d(1, A) = 0$.

6.- En el espacio métrico $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de funciones continuas definidas en $[0,1]$, con la distancia $d(f,g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$.

Sea

$$S := \{h \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : e^t \leq h(t) \leq e,\ t \in [0,1]\}$$

Calcule $d(f, S)$, donde $f(t) := \cos(t), t \in [0,1]$.
Sugerencia: Dibuje.

---

[1] No siempre existen funciones inyectivas de $\mathbb{R}$ a un conjunto arbitrario X. Por ejemplo, si $X = \mathbb{N}$, se puede demostrar que ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva.