Matemáticas I BA BT LQ

Sergio Muñoz

F. Ciencias, UChile

Jueves 18 mayo 2023

Clase Jueves 18 mayo

Objetivos

1. Funciones
2. Observación respecto de una función
3. Ejemplo simple de una función
4. Ejemplo de función mal definida
5. Ejercicios

Funciones

Definición

Una **función** es un objeto matemático que consta de tres componentes:

- un conjunto de objetos matemáticos llamado **dominio de la función**

Funciones

Definición

Una **función** es un objeto matemático que consta de tres componentes:

- un conjunto de objetos matemáticos llamado **dominio de la función**
- un conjunto de objetos matemáticos llamado **codominio de la función**

Funciones

Definición

Una **función** es un objeto matemático que consta de tres componentes:

- un conjunto de objetos matemáticos llamado **dominio de la función**
- un conjunto de objetos matemáticos llamado **codominio de la función**
- una **regla de asignación** que a cada elemento del dominio le asigna (le asocia) un único elemento en el codominio llamado **imagen** de él.

Observación

- Considere la **función** f (ese es su **nombre**)

Observación

- Considere la **función** f (ese es su **nombre**) que a cada número real x en el intervalo $[1, 5]$ (ese es su **dominio**)

Observación

- Considere la **función** f (ese es su **nombre**) que a cada número real x en el intervalo $[1, 5]$ (ese es su **dominio**) le **asigna** el número real $3x^2 - 2$ (esa es la **imagen** del objeto x en el conjunto de números reales, que es su codominio)

Observación

- Considere la **función** f (ese es su **nombre**) que a cada número real x en el intervalo $[1, 5]$ (ese es su **dominio**) le **asigna** el número real $3x^2 - 2$ (esa es la **imagen** del objeto x en el conjunto de números reales, que es su codominio)
- También diremos que $3x^2 - 2$ para $x \in [1, 5]$ es la **regla de asignación de la función**.

Observación

- Considere la **función** f (ese es su **nombre**) que a cada número real x en el intervalo $[1,5]$ (ese es su **dominio**) le **asigna** el número real $3x^2 - 2$ (esa es la **imagen** del objeto x en el conjunto de números reales, que es su codominio)
- También diremos que $3x^2 - 2$ para $x \in [1,5]$ es la **regla de asignación de la función**.
- Puede notarse que la imagen de 4 (que pertenece al dominio) es $3 \cdot 4^2 - 2 = 46$ pero que no hay imagen de 6 por la función pese a que existe $3 \cdot 6^2 - 2$, ya que $6 \notin [1,5]$, es decir, el dominio no depende sólo de la operatoria de la regla de asignación.

Observación

- Considere la **función** f (ese es su **nombre**) que a cada número real x en el intervalo $[1,5]$ (ese es su **dominio**) le **asigna** el número real $3x^2-2$ (esa es la **imagen** del objeto x en el conjunto de números reales, que es su codominio)
- También diremos que $3x^2-2$ para $x\in[1,5]$ es la **regla de asignación de la función**.
- Puede notarse que la imagen de 4 (que pertenece al dominio) es $3\cdot 4^2-2=46$ pero que no hay imagen de 6 por la función pese a que existe $3\cdot 6^2-2$, ya que $6\notin[1,5]$, es decir, el dominio no depende sólo de la operatoria de la regla de asignación.
- ¿Puede ser -2 una imagen de f para algún valor del dominio? No, ya que $3x^2-2=-2$ equivale a $x^2=0$ que a su vez equivale a $x=0$, pero $0\notin[1,5]$, por lo que no es factible que -2 sea imagen.

Simbología de funciones

Notación

- Se denota por $f : A \to B$ a la afirmación de que f es el nombre de una función cuyo dominio es el conjunto A y cuyo codominio es el conjunto B.

Simbología de funciones

Notación

- Se denota por $f : A \to B$ a la afirmación de que f es el nombre de una función cuyo dominio es el conjunto A y cuyo codominio es el conjunto B.
- El único elemento del codominio que le asigno por esta función al objeto $x \in A$ se le denota $f(x)$.

Simbología de funciones

Notación

- Se denota por $f : A \to B$ a la afirmación de que f es el nombre de una función cuyo dominio es el conjunto A y cuyo codominio es el conjunto B.
- El único elemento del codominio que le asigno por esta función al objeto $x \in A$ se le denota $f(x)$.
- Si quiero explicitar la operatoria que se usa para asignar tal imagen, se usa a veces la notación $x \mapsto f(x)$

Simbología de funciones

Notación

- Se denota por $f : A \to B$ a la afirmación de que f es el nombre de una función cuyo dominio es el conjunto A y cuyo codominio es el conjunto B.
- El único elemento del codominio que le asigno por esta función al objeto $x \in A$ se le denota $f(x)$.
- Si quiero explicitar la operatoria que se usa para asignar tal imagen, se usa a veces la notación $x \mapsto f(x)$
- Además, dado el nombre de la función, f, me puedo referir a su dominio como $Dom(f)$ (el conjunto A en este caso) y a su codominio como $Cod(f)$ (el conjunto B en este caso)

Ejemplo de función mal definida

Demuestre que la siguiente función está mal definida:

$$f : [1, 6[\to]2, 4[\textit{ dada por } f(x) = 2x + 1$$

Ejemplo de función mal definida

Demuestre que la siguiente función está mal definida:

$$f : [1,6[\to]2,4[\textit{ dada por } f(x) = 2x+1$$

Respuesta

Si estuviera bien definida, a cada elemento x del dominio $[1,6[$ se le debiera asignar una única imagen $f(x) = 2x+1$ en el codominio $]2,4[$, pero no es así, ya que por ejemplo $2 \in \mathrm{Dom}(f)$ pero

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \notin]2,4[$$

Funciones definidas por casos

Observaciones

- La regla de asignación de una función puede ser algebraica (cuadrática, exponencial, etcétera), muestral (encuestas, toma de muestras), aleatoria (registrar lanzamiento de dados u otro evento aleatorio)

Funciones definidas por casos

Observaciones

- La regla de asignación de una función puede ser algebraica (cuadrática, exponencial, etcétera), muestral (encuestas, toma de muestras), aleatoria (registrar lanzamiento de dados u otro evento aleatorio)
- La regla de asignación puede ser diferente según a qué objetos del dominio se aplica, como en las **funciones definidas por casos** (también llamadas funciones por tramos)

Funciones definidas por casos

Observaciones

- La regla de asignación puede ser diferente según a qué objetos del dominio se aplica, como en las **funciones definidas por casos** (también llamadas funciones por tramos)

Definición

Se dice que una función está **definida por casos** cuando su dominio es la unión de subconjuntos disjuntos en los cuales la regla de asignación es distinta según el subconjunto al que se aplica.

Funciones definidas por casos

Definición

Se dice que una función está **definida por casos** cuando su dominio es la unión de subconjuntos disjuntos en los cuales la regla de asignación es distinta según el subconjunto al que se aplica.

Ejemplo

La función valor absoluto, $abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$abs(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es un ejemplo de función definida por casos, con

$$\mathrm{Dom}(abs) = \mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup [0, \infty[$$

y $abs(x) = x$ cuando $x \in [0, \infty[$ pero $abs(x) = -x$ cuando $x \in]-\infty, 0[$

Ejercicios

1. Verifique que las funciones siguientes están mal definidas (no cumplen la definición)
   1. $f : \mathbb{R} \to]-3, 40[$ dada por $f(x) = 3x - 5$
   2. $f : [0, 5[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
   3. $f :]-9, 23] \to]-25, -8[$ dada por $f(x) = 2x^2 - 7$
   4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x-4}$
2. Decida, justificadamente, si la siguiente función está o no bien definida:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{con} \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 5 \\ 3 - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$