Matemáticas I BA BT LQ

Sergio Muñoz

F. Ciencias, UChile

Viernes 28 abril 2023

Clase Viernes 28 abril

Objetivos

1. Propiedades de operatoria de números
2. Propiedades de orden entre números
3. Ejercicios

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- Suma es asociativa: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- Suma es asociativa: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Existe neutro aditivo $0 \in \mathbb{R}$ $x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- Suma es asociativa: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Existe neutro aditivo $0 \in \mathbb{R}$ $x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$
- Cada número tiene un inverso aditivo:
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = y + x = 0)$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- Suma es asociativa: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Existe neutro aditivo $0 \in \mathbb{R}$ $x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$
- Cada número tiene un inverso aditivo:
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = y + x = 0)$
- Asociatividad de multiplicación: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- Suma es asociativa: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Existe neutro aditivo $0 \in \mathbb{R}$ $x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$
- Cada número tiene un inverso aditivo:
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = y + x = 0)$
- Asociatividad de multiplicación: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$
- Existe neutro multiplicativo: $1 \cdot x_1 = x_1$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- Suma es asociativa: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Existe neutro aditivo $0 \in \mathbb{R}$ $x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$
- Cada número tiene un inverso aditivo: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = y + x = 0)$
- Asociatividad de multiplicación: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$
- Existe neutro multiplicativo: $1 \cdot x_1 = x_1$
- Cada número no cero tiene un inverso multiplicativo: $\forall x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = y \cdot x = 1)$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}$ es cerrado bajo suma y producto: $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
- Suma es conmutativa: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- Suma es asociativa: $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Existe neutro aditivo $0 \in \mathbb{R}$ $x_1 + 0 = 0 + x_1 = x_1$
- Cada número tiene un inverso aditivo: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = y + x = 0)$
- Asociatividad de multiplicación: $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$
- Existe neutro multiplicativo: $1 \cdot x_1 = x_1$
- Cada número no cero tiene un inverso multiplicativo: $\forall x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = y \cdot x = 1)$
- Distributividad: $x_3 \cdot (\ x_1 + x_2) = (x_3 \cdot x_1) + (x_3 \cdot x_2)$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- Neutro aditivo es único

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- Neutro aditivo es único
- Neutro multiplicactivo es único

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- Neutro aditivo es único
- Neutro multiplicactivo es único
- Inverso aditivo es único para el número del que es inverso.

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- Neutro aditivo es único
- Neutro multiplicactivo es único
- Inverso aditivo es único para el número del que es inverso.
- Inverso multiplicativo es único para el número del que es inverso.

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- Neutro aditivo es único
- Neutro multiplicactivo es único
- Inverso aditivo es único para el número del que es inverso.
- Inverso multiplicativo es único para el número del que es inverso.

Simbología

- $-x$ denota al inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$

Propiedades de operatoria de números

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

- Neutro aditivo es único
- Neutro multiplicactivo es único
- Inverso aditivo es único para el número del que es inverso.
- Inverso multiplicativo es único para el número del que es inverso.

Simbología

- $-x$ denota al inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$
- x^{-1} denota al inverso multiplicativo de $x \in \mathbb{R}$ con$x \neq 0$

Propiedades de operatoria de números

Simbología

- $-x$ denota al inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$
- x^{-1} denota al inverso multiplicativo de $x \in \mathbb{R}$ con$x \neq 0$
- $\dfrac{x}{y}$ denota a $x \cdot y^{-1}$

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todo $x \in \mathbb{R}$:

- $0 \cdot x = 0$

Propiedades de operatoria de números

Simbología

- $-x$ denota al inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$
- x^{-1} denota al inverso multiplicativo de $x \in \mathbb{R}$ con$x \neq 0$
- $\dfrac{x}{y}$ denota a $x \cdot y^{-1}$
- x^n denota a $\underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-veces}}$ si $n \in \mathbb{N}$ y denota a $\underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \cdots \cdot x^{-1}}_{|n|\text{-veces}}$ si $n \in \mathbb{Z}^-$

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todo $x \in \mathbb{R}$:

- $0 \cdot x = 0$
- $(-1) \cdot x = -x \wedge -(-x) = x$ y si $x \neq 0$, también $(x^{-1})^{-1} = x$

Propiedades de operatoria de números

Simbología

- $-x$ denota al inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$
- x^{-1} denota al inverso multiplicativo de $x \in \mathbb{R}$ con$x \neq 0$
- $\dfrac{x}{y}$ denota a $x \cdot y^{-1}$
- x^n denota a $\underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-veces}}$ si $n \in \mathbb{N}$ y denota a $\underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \cdots \cdot x^{-1}}_{|n|\text{-veces}}$ si $n \in \mathbb{Z}^-$

Propiedades de adición y multiplicación de números reales

Se cumplen, para todo $x \in \mathbb{R}$:

- $0 \cdot x = 0$
- $(-1) \cdot x = -x \wedge -(-x) = x$ y si $x \neq 0$, también $(x^{-1})^{-1} = x$
- $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$ si $x \neq 0 \wedge y \neq 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \Longleftrightarrow b > a \Longleftrightarrow b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \iff -a < 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \iff -a < 0$
6. $a \geq b \iff (a > b \vee a = b)$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \iff -a < 0$
6. $a \geq b \iff (a > b \vee a = b)$
7. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \iff -a < 0$
6. $a \geq b \iff (a > b \vee a = b)$
7. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$
8. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \Longleftrightarrow b > a \Longleftrightarrow b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$
6. $a \geq b \Longleftrightarrow (a > b \vee a = b)$
7. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$
8. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$
9. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \iff -a < 0$
6. $a \geq b \iff (a > b \vee a = b)$
7. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$
8. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$
9. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$
10. Si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b < 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \iff -a < 0$
6. $a \geq b \iff (a > b \vee a = b)$
7. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$
8. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$
9. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$
10. Si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b < 0$
11. Si $a \neq 0$ entonces $\dfrac{b}{a} > 0 \iff a \cdot b > 0$

Propiedades de orden

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$
2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$
3. $a < b \iff b > a \iff b - a > 0$
4. (Tricotomía) Se cumple una y solo una de las tres siguientes afirmaciones para $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x > y \vee x < y \vee x = y$
5. $a > 0 \iff -a < 0$
6. $a \geq b \iff (a > b \vee a = b)$
7. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$
8. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$
9. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$
10. Si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b < 0$
11. Si $a \neq 0$ entonces $\dfrac{b}{a} > 0 \iff a \cdot b > 0$
12. $a^2 \geq 0$ y de hecho $a^2 = 0 \iff a = 0$

Inecuaciones

Resuelva (encuentre el conjunto de todas las soluciones)
$3x - 7 > x + 1$

Solución

Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tiene

$$3x - 7 > x + 1 \iff 3x - 7 + 7 - x > x + 1 + 7 - x$$
$$\iff 2x > 8 \underbrace{\iff}_{\substack{2 > 0 \\ \therefore \frac{1}{2} > 0}} 2x \cdot \frac{1}{2} > 8 \cdot \frac{1}{2} \iff x > 4$$

El **conjunto** de todas las soluciones de $3x - 7 > x + 1$ es

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 4\} =]4, \infty[$$

Ejercicios

1. Use las propiedades de operaciones y orden para justificar que siempre se cumple $a \cdot c < b \cdot c$ cuando $a > b \wedge c < 0$
2. Use las propiedades de operaciones y orden para justificar que siempre se cumple $a^2 > 4$ cuando $a < -2$
3. Use las propiedades de operaciones y orden para justificar que siempre se cumple $-1 < x < 0$ cuando $\frac{1}{x} < -1$
4. Resuelva paso a paso la inecuación $3x + 2 < 2 - x$
5. Resuelva paso a paso la inecuación $\dfrac{3}{2 - x} < 0$