Fabián Sepúlveda Soto

Pauta Ayudantía 8: Calculo de Variaciones

07 de Noviembre de 2022

P1.- Consideremos el siguiente funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla u)^\perp D\nabla u + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)u^2 - \int_\Omega fu$$

donde D es simétrica, continua, definida positiva, uniformemente acotada superior e inferiormente, y $\alpha(x)$ es positiva y uniformemente acotada superior e inferiormente. Demuestre que si $u \in H_0^1(\Omega)$ es punto crítico de $J(u)$, entonces resuelve el siguiente problema de EDP

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(D(x)\nabla u) + \alpha(x)u = f, \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Demostración:

Veamos que es un funcional clase $\mathcal{C}^1$. Veamos que su propuesto de diferencial cumple con las condiciones necesarias

$$J(u+h) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla(u+h))^\perp D\nabla(u+h) + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)(u+h)^2 - \int_\Omega f(u+h)$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla u)^\perp D\nabla u + \int_\Omega (\nabla h)^\perp D\nabla u + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla h)^\perp D\nabla h + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)u^2 + \int_\Omega \alpha(x)uh + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)h^2$$

$$-\int_\Omega fu - \int_\Omega fh = J(u) + \int_\Omega (\nabla h)^\perp D\nabla u + \int_\Omega \alpha(x)uh - \int_\Omega fh + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla h)^\perp D\nabla h + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)h^2$$

Dado que D es simétrica y definida positiva. Proponemos el siguiente operador lineal en h como diferencial de $J(u)$

$$L(u)[h] = \int_\Omega (\nabla h)^\perp D\nabla u + \int_\Omega \alpha(x)uh - \int_\Omega fh$$

nos falta probar que

$$NL(u)[h] = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla h)^\perp D\nabla h + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)h^2$$

es orden $\wr(||h||_{H_0^1(\Omega)})$. Ahora, Como D y α son uniformemente acotadas por arriba, se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\nabla h)^{\perp}D\nabla h \leq \frac{C}{2}||\nabla h||^2_{L^2(\Omega)}$$

y

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\alpha(x)h^2 \leq \frac{R}{2}||h||^2_{L^2(\Omega)}$$

para ciertos C y R positivos, se tiene que

$$NL(u)[h] \leq \text{máx}\{\frac{C}{2}, \frac{R}{2}\}||h||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

por lo tanto

$$lim_{||h||_{H_0^1(\Omega)}\longrightarrow 0}\frac{NL(u)[h]}{||h||_{H_0^1(\Omega)}} = 0$$

Luego podemos identificar el diferencial de $J(u)$ con el operador $L(u)$ propuesto. De esto se tiene que $J(u)$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

Ahora, si $u \in H_0^1(\Omega)$ es punto crítico de $J(u)$, entonces $DJ(u)[h] = 0, \forall h \in H_0^1(\Omega)$. Tomemos la definición del diferencial propuesto

$$L(u)[h] = \int_{\Omega}(\nabla h)^{\perp}D\nabla u + \int_{\Omega}\alpha(x)uh - \int_{\Omega}fh$$

Ahora ntegremos por partes

$$= \int_{\Omega} -(\nabla \cdot D\nabla u)h + \int_{\Omega}\alpha(x)uh - \int_{\Omega}fh + \int_{\partial\Omega}D\partial_n uh$$

pero, al estar $h \in H_0^1(\Omega)$, la última integral se nula. Luego podemos factorizar h

$$= \int_{\Omega}[-(\nabla \cdot D\nabla u) + \int_{\Omega}\alpha(x)u - \int_{\Omega}f]h = 0$$

Luego, por el teorema de representación de Riez y Hanh-Banach, esto ocurre si y solo si

$$-(\nabla \cdot D\nabla u) + \int_{\Omega}\alpha(x)u - \int_{\Omega}f = 0$$

Luego, si u es punto crítico, entonces resuelve el sistema propuesto.

P2.- Considere el siguiente problema de evolución

$$\begin{cases} \partial_t u = f(u, x, t), \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{en } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), || \quad ||_{H_0^1(\Omega)}) \end{cases}$$

donde $f(u,x,t)$ es el siguiente operador

$$f(u,x,t) = \triangle u + u - u^3$$

y Ω es acotado.

a) Demuestre que el siguiente funcional de energía es tal que $f(u,x,t) = -DE(u)$.

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{2}u^2$$

Demostración:

Para lo anterior, veamos que $E(u)$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y calculemos su diferencial

$$E(u+h) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{1}{4}u^4-\frac{1}{2}u^2+\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla h+u^3h-uh+\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla h|^2+\frac{3}{2}u^2h^2+\frac{1}{2}h^2+uh^3+\frac{1}{4}h^4$$

Definamos los siguientes operadores

$$L(u)[h] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + u^3h - uh$$

$$NL(u)[h] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla h|^2 + \frac{3}{2}u^2h^2 - \frac{1}{2}h^2 + uh^3 + \frac{1}{4}h^4$$

Por lo que podemos reescribir la igualdad anterior como

$$E(u+h) = E(u) + L(u)[h] + NL(u)[h]$$

Veamos que $NL(u)[h] = \wr(h)$

$$|NL(u)[h]| \leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla h|^2 + \int_\Omega \frac{3}{2}u^2h^2 + \int_\Omega \frac{1}{2}h^2 + \int_\Omega |u||h|^3 + \int_\Omega \frac{1}{4}h^4$$

$$\leq \frac{1}{2}||h||^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega \frac{3}{2}u^2h^2 + \int_\Omega |u||h|^3 + \int_\Omega \frac{1}{4}h^4$$

luego se tiene que

$$\frac{||NL(u)[h]}{||h||_{H^1_0(\Omega)}} \leq \frac{1}{2}||h||_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega \frac{3}{2}u^2\frac{h^2}{||h||_{H^1_0(\Omega)}} + \int_\Omega |u|\frac{|h|^3}{||h||_{H^1_0(\Omega)}} + \int_\Omega \frac{1}{4}\frac{h^4}{||h||_{H^1_0(\Omega)}}$$

$$\leq \frac{1}{2}||h||_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega \frac{3}{2}u^2\frac{h^2}{||h||_{L^2(\Omega}} + \int_\Omega |u|\frac{|h|^3}{||h||_{L^2(\Omega)}} + \int_\Omega \frac{1}{4}\frac{h^4}{||h||_{L^2(\Omega}}$$

luego como Ω es acotado, al tomar el límite $||h||_{H^1_0(\Omega)} \longrightarrow 0$, se tiene que los integrandos del lado derecho convergerán a 0, dado que $u \in L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ y que $||h||_{L^2(\Omega)} \leq ||h||_{H^1_0(\Omega)}$

Luego $E(u)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$DE(u)[h] = L(u)[h] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla h + u^3 h - uh = L(u)[h] = \int_{\Omega} [-\triangle u + u^3 - u]h$$

Luego se tiene que

$$DE(u) = -\triangle u + u^3 - u = -f(u, x, t)$$

b) Demuestre que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ es mínimo del funcional de energía, entonces es un cero del operador de f.

Demostración:

Si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ es un punto crítico, quiere defir que $\forall h \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$DE(u)[h] = \int_{\Omega} [-\triangle u + u^3 - u]h = 0$$

Luego por el teorema de representación de Riez-Frechet, y el teorema de Hanh-Banach, se tiene que

$$-\triangle u + u^3 - u = 0, \forall x \in \Omega$$

Luego corresponde a un cero del operador $f(u, x, t)$

c) Demuestre que $E(u(t))$ es decreciente como función de t.

Demostración:

Dados los resultados de a) y b), el sistema puede ser descrito como un flujo gradiente de la forma

$$\partial_t u = -\nabla E(u)$$

tomemos el sistema entonces

$$\partial_t u = \triangle u + u - u^3$$

y multipliquemos todo por $\partial_t u$ e integremos sobre el dominio Ω, obtenemos lo siguiente

$$||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \partial_t u \triangle u + u\partial_t u - u^3 \partial_t u = \int_{\Omega} \partial_t u \triangle u + \int_{\Omega} \partial_t \frac{u^2}{2} - \int_{\Omega} \partial_t \frac{u^4}{4}$$

$$= -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(\partial_t u) + \partial_t [\int_{\Omega} \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}] = -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \partial_t(\nabla u) + \partial_t [\int_{\Omega} \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}]$$

$$= -\int_{\Omega} \partial_t (\frac{|\nabla u|^2}{2}) + \partial_t [\int_{\Omega} \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}] = -\partial_t [\int_{\Omega} (\frac{|\nabla u|^2}{2}) - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}]$$

Luego, se tiene de manera genérica que

$$\partial_t[\int_\Omega (\frac{|\nabla u|^2}{2}) - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}] = \partial_t E(u) = -||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)}$$

Luego integrando en un intervalos $[0, t_0]$ se tiene que

$$\int_0^{t_0} \partial_t E(u) dt = E(u(t_0)) - E(u(0)) = -\int_0^{t_0} ||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} dt \leq 0$$

Luego sigue que

$$E(u(t_0)) \leq E(u(0))$$

siendo $E(u)$ decreciente como función de t

d) Demuestre que el sistema converge a un cero del operador de Nemitski.

Demostración:

De la igualdad anterior obtuvimos que

$$E(u(t_0)) + \int_0^{t_0} ||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} dt = E(u(0))$$

Ahora, sabemos que $\forall u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ se tiene que

$$(u^2 - 1)^2 \geq 0$$

por lo tanto

$$u^4 - 2u^2 \geq -1$$

$$\frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} \geq -\frac{1}{4}$$

luego obtenemos la siguiente cota

$$\int_0^{t_0} ||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(t_0)|^2 - \frac{1}{4}|\Omega|$$

$$\leq \int_0^{t_0} ||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(t_0)|^2 + \frac{1}{4}u(t_0)^4 - \frac{1}{2}u(t_0)^2$$

$$\leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(0)|^2 + \frac{1}{4}u(0)^4 - \frac{1}{2}u(0)^2$$

Luego, como $\forall t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, se tiene que

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(t_0)|^2 \geq 0$$

la desigualdad anterior se puede reescribir como

$$\int_0^{t_0} ||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} dt \leq \frac{1}{4}|\Omega| + \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(0)|^2 + \frac{1}{4}u(0)^4 - \frac{1}{2}u(0)^2$$

Ahora, como el lado derecho no depende de t_0 podemos tomar el límite de $t_0 \longrightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} ||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} dt \leq \frac{1}{4}|\Omega| + \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(0)|^2 + \frac{1}{4}u(0)^4 - \frac{1}{2}u(0)^2$$

Ahora, como $||\partial_t u||^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$, y el lado derecho es una cota uniforme, por convergencia de la integral impropia se tiene que

$$lim_{t_0 \longrightarrow \infty} ||\partial_t u(t_0)||_{L^2(\Omega)} = 0$$

siendo esta una solución estacionaria del sistema, y por tanto un cero del operador $f(u, x, t)$.