Fabián Sepúlveda Soto

Ayudantía 8: Calculo de Variaciones

07 de Noviembre de 2022

P1.- Consideremos el siguiente funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla u)^\perp D \nabla u + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha(x)u^2 - \int_\Omega fu$$

donde D es simétrica, continua y definida positiva, y $\alpha(x)$ es positiva y uniformemente acotada superior e inferiormente. Demuestre que si $u \in H_0^1(\Omega)$ es punto crítico de $J(u)$, entonces resuelve el siguiente problema de EDP

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D(x)\nabla u) + \alpha(x)u = f, \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

P2.- Considere el siguiente problema de evolución

$$\begin{cases} \partial_t u = f(u,x,t), \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{en } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

donde $f(u,x,t)$ es el siguiente operador de Nemitski

$$f(u,x,t) = \triangle u + u - u^3$$

a) Demuestre que el siguiente funcional de energía es tal que $f(u,x,t) = -DE(u)$.

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{2}u^2$$

b) Demuestre que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ es mínimo del funcional de energía, entonces es un cero del operador de Nemitski.

c) Demuestre que $E(u(t))$ es decreciente como función de t.

d) Demuestre que el sistema converge a un cero del operador de Nemitski.