

Fabián Sepúlveda Soto

Ayudantía 7: Topologías débil-*

04 de Noviembre de 2022

[Teorema de Goldstein:] Sea E espacio de Banach. $J(B_E)$ es $\sigma(E^{**}, E^*)$ -densa en $B_{E^{**}}$.

P1.- Sea X espacio de Banach y sea $Y \subseteq X^*$ subespacio vectorial cerrado tal que se cumple que

i) Y separa puntos en X ii) $B_X = B_X(0, 1)$ es compacta con la topología inducida por Y

a) Definamos $\pi : X^{**} \rightarrow Y^*$ tal que $\pi(x^{**}) = x^{**}|_Y$. Muestre que π está bien definida y que $\pi(B_{X^{**}}) = B_{Y^*}$

b) Sea $y^{**} \in Y^*$. Pruebe que existe $x \in X$ tal que $\pi(J(x)) = y^{**}$

c) Demuestre que Y^* es isomorfo e isométrico a X .

d) Diremos que un espacio de Banach X posee predual, si existe Y tal que $Y^* = X$. Demuestre que X admite un predual ssi se cumplen las condiciones i) y ii).

P2.- Suponga que E es un espacio de Banach separable. Demuestre que $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$ es metrizable

P3.- Consideremos el siguiente funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha u^2 - \int_{\Omega} f u$$

con α una función continua, positiva y uniformemente acotada, y $f \in L^2(\Omega)$. Estudie la existencia de soluciones a este problema y si se alcanza el mínimo en $H^1(\Omega)$.