Fabián Sepúlveda Soto

Pauta Ayudantía 6: Topologías débiles

24 de Octubre de 2022

P1.- a) Considere $(E, || \quad ||)$ un espacio de Banach y $K \subseteq E$ un conjunto $|| \quad ||$-compacto.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Demuestre que $x_n \longrightarrow x$

Demostración:

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ en la topología fuerte, siginifica que este posee un punto de acumulación en K al cual converge en norma, el cual pertenece a K.

Supongamos por contradicción que $\exists y \in K$ tal que $x \neq y$ punto de acumulación de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $x \neq y$ y E es espacio de Banach, por Hanh-Banach existe una función $f \in E^\star$ que separa x e y i.e. en la topología $\sigma(E, E^\star)$ existen vecindades convexas abiertas disjuntas de x e y, dado que la topología es Haussdorf.

Ahora como $x_n \rightharpoonup x$, pero como supusimos que $\exists \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tal que $x_{n_j} \longrightarrow y$, se tiene que $f(x_{n_j}) \longrightarrow f(y)$, pero $f(x) \neq f(y)$, lo cual contradice que $x_n \rightharpoonup x$. Luego el punto de acumulación de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es único, por tanto $x_n \longrightarrow x$

b)Considere $(E, || \quad ||)$ un espacio de Banach. Suponga que $x_n \rightharpoonup 0$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Demuestre que $x_n \longrightarrow 0$

Demostración:

Como E es Banach y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, significa que posee un límite único. Supongamos por contradicción que $x_n \longrightarrow x$ con $x \neq 0$. Ahora $\sigma(E, E^\star)$ es separada, por tanto $\exists f \in E^\star$ tal que $f(x) \neq 0$. Pero $x_n \rightharpoonup 0$, por lo que $f(x_n) \longrightarrow 0$. Pero por otro lado por continuidad de la $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, lo cual contradice la unididad del límite. Por lo tanto $x_n \longrightarrow 0$.

P2.- Considere $(E, || \quad ||)$ un espacio de Banach y (x_n) una suceción en E. Sea

$$K_l = \overline{conv\{x_n : n \geq l\}}$$

a) Pruebe que si $x_n \rightharpoonup x$, entonces

$$\bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l = \{x\}$$

Demostración:

Vemos que la convergencia débil es shifteable i.e.

Si $x_n \rightharpoonup x$ entonces $x_{n+l} \rightharpoonup x, \forall l \in \mathbb{N}$. Ahora como K_l son convexos cerrados fuertes, implica que son cerrados débiles. Además por la misma definición de K_l, se tiene que

$$\{x_{n+l}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K_l$$

Luego, como $x_n \rightharpoonup x$, entonces $x \in K_l, \forall l \in \mathbb{N}$, lo que da una de las inclusiones.

Ahora por contradicción supongamos que $\exists y \neq x$ tal que $y \in \bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l$. Luego como $\sigma(E, E^\star)$ es Haussdorf, entonces existe una vecindad V de x que no contiene a y.

Como $x_n \rightharpoonup x$ y K_l con vecindades convexas cerradas (si tuvieran interior vacío x_n es una suceción constante) de x. Luego como $x_n \rightharpoonup x$, entonces $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > k_0, k_n \in K_{k_0}$. Como V es vecindad $\sigma(E, E^\star)$-abierta de x, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V, \forall n \geq k_1$. Luego tomando $\bar{k} = Max\{k_0, k_1\}$, se tiene que $K_{\bar{k}} \subseteq V$.

Por lo tanto $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l \subseteq K_{\bar{k}} \subseteq V$, lo que contradice que $y \in \bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l$. Luego se tiene la otra inclusión.

b) Suponga que E es reflexivo. Pruebe que si (x_n) es acotada y $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l = \{x\}$ entonces $x_n \rightharpoonup x$.

Demostración:

Sea V vecindad $\sigma(E, E^\star)$-abierta de x. Esto implica que $G_k = K_k \cap V^c$ es vecindad cerrada de x. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces K_l son acotados convexos $\sigma(E, E^\star)$-cerrada.

Como E es reflexivo, entonces $J(E) = E$. Luego por Banach-Alaoglu, se sabe que todos los convexos cerrados acotados de $E^{\star\star}$ son $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$-compactos. Luego $J(G_k)$ son $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$-compactos, por lo tanto G_k son $\sigma(E, E^\star)$-compactos por continuidad de J.

Ahora, como $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l = \{x\}$, entonces $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} G_l = \bigcap_{l\in\mathbb{N}}(K_l \cap V^c) = (\bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l) \cap V^c = \{x\} \cap V^c = \varnothing$

P3.- Sea E espacio de Banach y sea $A \subseteq E$ $\sigma(E, E^\star)$-compacto.

a) Sea $f \in E^\star$. Demuestre que $f(A)$ es acotado.

Demostración:

Procedamos por contradicción. Supongamos que $F(A)$ no es acotado.

Luego en particular $\exists\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|y_n| \longrightarrow \infty$. Luego por definición de $f(A)$, $\forall y_n, \exists x_n \in A$ tal que $f(x_n) = y_y$.

Pero la hipótesis anterior contradice que A sea $\sigma(E, E^\star)$-compacto, ya que $\exists\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_j} \rightharpoonup x$.

Por lo tanto $f(x_{n_j}) \longrightarrow f(x)$ contradiciendo el hecho que $|y_{n_j}| \longrightarrow \infty$. Por tanto $f(A)$ es acotado.

b) Demnuestre que A es acotado.

Demostración:

Consideremos la inyección canónica $J : E \longrightarrow E^{\star\star}$. Veamos que la familia $\mathcal{F} = \{J_x : x \in A\}$ es puntualmente acotada

$$|J_x(f)| = |f(x)| < \infty, \forall f \in E^\star$$

dado que $f(A)$ es acotado. Luego $\mathcal{F}$ es una familia putualmente acotada y E es Banach. Por Banach-Steinhaus se tiene que

$$sup_{x\in A}||J_x||_{E^{\star\star}} < \infty$$

Luego como J es isometría, se tiene que A es acotado.

c) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Definamos

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_n$$

Demuestre que $\sigma_n \rightharpoonup x$

Demostraión:

Como $x_n \rightharpoonup x$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, por lo cual

$$||x_n||_E < C$$

para $C > 0$. Luego sea $f \in E^\star$, se tiene que

$$|f(sigma_n) - f(x)| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_n) - f(x)| \leq \frac{1}{n}(|\sum_{k=1}^{n} f(x_n) - f(x)|)$$

Ahora como $x_n \rightharpoonup x$ se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N_0, |f(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora tomemos N_1 tal que $\frac{Max\{N_0, N_1\}}{n} < \frac{\epsilon}{4C}$. Luego

$$|f(sigma_n) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - f(x)| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |f(x_k) - f(x)| \leq \frac{NC}{n} + \frac{(n-N)\epsilon}{2n} = \frac{N(2C-\epsilon)}{2n} + \frac{\epsilon}{2} <$$

Luego se tiene que $\sigma_n \rightharpoonup x$.

d) Sea M subespacio vectorial de E y $f_0 \in E^\star$. Pruebe que $\exists g_0 \in M^\perp$ tal que

$$Inf_{g\in M^\perp}||f_0 - g||_{E^\star} = ||f_0 - g_0||_{E^\star}$$

Demostración:

Sabemos que

$$Inf_{g\in M^\perp}||f_0 - g||_{E^\star} \leq ||f_0 - g_0||_{E^\star}$$

Ahora consideremos $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suceción minimizante. Recordemos la definición del ortogonal

$$M^\perp = \{f \in E^\star : f(x) = 0, \forall x \in M\}$$

Como $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una suceción que converge fuerte, entonces es acotada. Luego por Banach-Alaoglu se tiene que posee una subsuceción $\{g_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge débil. Por lo tanto

$$|f_0 - g_{n_j}(x)| \leq ||x||_E||f_0 - g_{n_j}||_{E^\star}$$

Ahora como $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ era suceción minimizante, entonces $\{g_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es tambié minimizante. Ahora ambos lados de la desigualdad convergen. Luego $M^{\perp}$ es convexo cerrado fuerte, por lo tanto es cerrado débil, y como la topología débil y débil-* son Haussdorff entonces se tiene que

$$||f_0 - g_0||_{E^\star} \leq Inf_{g\in M^{\perp}}||f_0 - g||_{E^\star}$$

teniéndose la otra desigualdad.

P4.- Sean E, F espacios de Banach

a) Sea $T : E \longrightarrow F$ operador lineal continuo. Muestre que existe un único operador lineal tal que $\forall x \in E, \forall y^\star \in F^\star$ se tiene que

$$(T^\star y^\star, x) = (y^\star, Tx)$$

$T^\star$ se denomina adjunto de T

Demostración:

Veamos que está bien definido. Como $Tx \in F$, entonces $(y^\star, Tx) \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $\exists x^\star \in X^\star$ tal que $(y^\star, Tx) = (x^\star, x)$. Definamos $f(x) = (T^\star y^\star, x)$. Como

$$|f(x)| = |(y^\star, Tx)| \leq ||y^\star||_{F^\star}||T||_{\mathcal{L}(E,L)}||x||_E$$

es lineal y continua, luego $f \in E^\star$, por lo tanto $\exists x^\star \in E^\star$ tal que $(y^\star, Tx) = (x^\star, x)$. Luego podemos definir $T^\star y^\star = x^\star$. Veamos que está bien definida como función.

Supongamos que existen $x_1^\star$ y $x_2^\star$ tales que $(x_1^\star, x) = (T^\star y^\star, x) = (x_2^\star, x)$. Por lo tanto $(x_1^\star - x_2^\star, x) = 0, \forall x \in E$, pero por Hanh-Banach $x_1^\star - x_2^\star = 0$. Luego la aplicación definida es función.

b) Muestre que $T^\star$ es continuo y que $||T^\star||_{\mathcal{L}(F^\star,E^\star)} = ||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$. Muestre que $T^\star$ es $\sigma(F^\star, F)$ - $\sigma(E^\star, E)$ continua.

Demostración:

Calculemos las normas de cada operador

$$||T^\star y^\star||_{E^\star} = sup_{||x||_E=1}|(T^\star y^\star, x)| = sup_{||x||_E=1}|(y^\star, Tx)| \leq sup_{||x||_E=1}||y^\star||_{F^\star}||Tx||_F = ||y^{\star||}||_{F^\star}||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$$

por lo tanto, tomando supremo sobre $||y^\star|| = |$

$$||T^\star||_{\mathcal{L}(F^\star,E^\star)} \leq ||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Luego se tiene que $T^\star \in \mathcal{L}(F^\star, E^\star)$

Por otra parte

$$||Tx||_{F^\star} = sup_{||y^\star||_{F^\star}=1}|(y^\star, Tx)| = sup_{||y^\star||_{F^\star}=1}|(T^\star y^\star, x)| \leq sup_{||y^\star||_{F^\star}=1}||T^\star y^\star||_{E^\star}||x||_E$$

dado que $T^\star y^\star \in E^\star, \forall y^\star \in F^\star$ por la desigualdad anterior. Luego

$$\leq ||T^\star||_{\mathcal{L}(F^\star,E^\star)}||x||_E$$

Luego se tiene que

$$||T^\star||_{\mathcal{L}(F^\star,E^\star)} = ||T||_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Ahora veamos que $T^\star$ es $\sigma(F^\star, F)$ - $\sigma(E^\star, E)$ continua. Eso es equivalente a que si $y^\star \rightharpoonup y^\star$ entonces $T^{\star y_n^\star} \rightharpoonup T^\star y^\star$. Por definición, como

$$y^\star \rightharpoonup y^\star, \Longleftrightarrow$$

$$(y_n^\star, Tx) \longrightarrow (y_n^\star, Tx), \forall x \in E, \Longleftrightarrow$$

$$(T^\star y_n^\star, x) \longrightarrow (T^\star y_n^\star, x), \forall x \in E, \Longleftrightarrow$$

$$T^{\star y_n^\star} \rightharpoonup T^\star y^\star$$

Luego $T^\star$ es $\sigma(F^\star, F)$ - $\sigma(E^\star, E)$ continua.

c) Sea $S : F^\star \longrightarrow E^\star$ lineal y $\sigma(F^\star, F)$ - $\sigma(E^\star, E)$ continua. Muestr que $\exists T : E \longrightarrow F$ lineal continuo tal que $T^\star = S$.

Demostración:

Como S es $\sigma(F^\star, F)$ - $\sigma(E^\star, E)$ continua entonces

$$g(y^\star) = (Sy^\star, x)$$

es una función lineal $\sigma(F^\star, F)$-continua a valores reales, por lo tanto $g \in (F^\star, \sigma(F^\star, F))^\star$, pero por defínción de la topología $\sigma(F^\star, F)$, se tiene que $(F^\star, \sigma(F^\star, F))^\star = J(F)$, con J la inyección canónica. Luego $\exists y \in F$ tal que

$$g(y^\star) = (Sy^\star, x) = (y^\star, y)$$

Definimos entonces $Tx = y$. Como la topología $\sigma(F^\star, F)$ es Haussdorf se tiene que es una función bien definida dado que si existieran $y_1 \neq y_2$ tal que $Tx = y_1 = y_2$, entonces

$$(Sy^\star, x) = (y^\star, y_1) = (y^\star, y_2)$$

pero al ser $\sigma(F^\star, F)$ Haussdorf, debe existir $\bar{y^\star} \in F^\star$ tal que $(\bar{y^\star}, y_1) \neq (\bar{y^\star}, y_2)$ contradiciendo la hipótesis inicial. Luego $T : E \longrightarrow F$ es una función bien definida. Veamos que es continua respecto a la topología original

$$||Tx||_F = sup_{||y^\star||_{F^\star}}|(y^\star, Tx)| = sup_{||y^\star||_{F^\star}}|(Sy^\star, x)| \leq sup_{||y^\star||_{F^\star}}||Sy^\star||_{E^\star}||x||_E = ||S||_{\mathcal{L}(F^\star,E^F)}||x||_E$$

teniéndose la continuidad. Luego $S = T^\star$