Fabián Sepúlveda Soto

Ayudantía 6: Topologías débiles

24 de Octubre de 2022

P1.- a) Considere $(E, ||\ \ ||)$ un espacio de Banach y $K \subseteq E$ un conjunto $||\ \ ||$-compacto. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Demuestre que $x_n \longrightarrow x$

b) Suponga que $x_n \rightharpoonup 0$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Demuestre que $x_n \longrightarrow 0$

P2.- Considere $(E, ||\ \ ||)$ un espacio de Banach y (x_n) una suceción en E. Sea

$$K_l = \overline{conv\{x_n : n \geq l\}}$$

a) Pruebe que si $x_n \rightharpoonup x$, entonces

$$\bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l = \{x\}$$

b) Suponga que E es reflexivo. Pruebe que si (x_n) es acotada y $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} K_l = \{x\}$ entonces $x_n \rightharpoonup x$.

P3.- Sea E espacio de Banach y sea $A \subseteq E$ $\sigma(E, E^\star)$-compacto.

a) Sea $f \in E^\star$. Demuestre que $f(A)$ es acotado.

b) Demnuestre que A es acotado.

c) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Definamos

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_n$$

Demuestre que $\sigma_n \rightharpoonup x$

d) Sea M subespacio vectorial de E y $f_0 \in E^\star$. Pruebe que $\exists g_0 \in M^\perp$ tal que

$$Inf_{g\in M^\perp}||f_0 - g||_{E^\star} = ||f_0 - g_0||_{E^\star}$$

P4.- Sean E, F espacios de Banach

a) Sea $T : E \longrightarrow F$ operador lineal continuo. Muestre que existe un único operador lineal tal que $\forall x \in E, \forall y^\star \in F^\star$ se tiene que

$$(T^\star y^\star, x) = (y^\star, Tx)$$

$T^\star$ se denomina adjunto de T

b) Muestre que $T^\star$ es continuo y que $||T^\star|| = ||T||$. Muestre que $T^\star$ es $\sigma(F^\star, F)$ - $\sigma(E^\star, E)$ continua.

c) Sea $S : F^\star \longrightarrow E^\star$ lineal y $\sigma(F^\star, F)$ - $\sigma(E^\star, E)$ continua. Muestr que $\exists T : E \longrightarrow F$ lineal continuo tal que $T^\star = S$.