Fabián Sepúlveda Soto

Pauta Ayudantía 5: Operadores compactos y Alternativa de Fredholm

05 de Octubre de 2022

P1.- Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D(x)\nabla u) + \lambda(x)u = f, \text{en } \Omega \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto conexo, $D(x)$ una matriz continua.

a) Muestre que es suficiente que

$$Min\{D_{11}(x), D_{22}(x)\} - \frac{D_{12}(x) + D_{21}(x)}{2} > \alpha > 0$$

para que el problema sea elíptico, y que si $\lambda(x) > \beta > 0$ entonces el problema se reduce a uno de minimización.

Demostración:

Debemos reescribir primero el problema de manera variacional. por lo cual multiplicamos por una funión test e integramos por partes usando las condiciones de borde

$$\int_\Omega (\nabla\phi)^t D(x)\nabla u + \lambda(x)u\phi = \int_\Omega f\phi$$

donde si se cumple que $\lambda(x) > \beta > 0$ entonces sólo falta ver que es elíptico para que este sea un problema de minimización.

Identificamos que el operador que actúa sobre u es el siguiente

$$L = -\nabla \cdot (D(x)\nabla) + \lambda = -a_{i,j}\partial_{i,j} + b_i\partial_i + c$$

Estos operadores de orden 2 son elípticos si y sólo si $\exists c > 0, \forall \psi \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$a_{i,j}\psi_i\psi_j \geq c|\phi|^2$$

Tomemos el siguiente vector en $\mathbb{R}^2$ $\vec{\psi} = (\psi_1, -\psi_2)$

Se tiene que

$$a_{ij}\psi_1\psi_2 = D_{11}(x)\psi_1^2 - D_{12}(x)\psi_1\psi_2 - D_{21}(x)\psi_2\psi_1 + D_{22}(x)\psi_2^2$$

Pero se sabe que

$$-\frac{\psi_1^2 + \psi_1^2}{2} \leq -\psi_1\psi_2$$

por lo tanto

$$a_{ij}\psi_1\psi_2 \geq D_{11}(x)\psi_1^2 + D_{22}(x)\psi_2^2 - (D_{12}(x) + D_{21}(x))\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)}{2}$$

$$\geq [Min\{D_{11}(x), D_{22}(x)\} - \frac{(D_{12}(x) + D_{21}(x))}{2}](\psi_1^2 + \psi_2^2) > \alpha(\psi_1^2 + \psi_2^2)$$

Teniéndose la elipticidad del operador. Por tanto es posible plantear, dada la simetría del problema, el problema anterior como uno de minimización.

b) Demuestre que si $D(x)$ es simétrica que cumple la condición anterior, entonces $L = -\nabla \cdot (D(x)\nabla) + \lambda(x)$ es autoadjunto

Demostración:

Desde la formulación débil en $u \in H_0^1(\Omega)$, vemos que el problema se puede escribir como

$$(Lu, v) = (f, v)$$

donde $(\cdot, \cdot)$ corresponde al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Queremos encontrar un operador $L^\star$ tal que

$$(Lu, v) = (u, L^\star v)$$

por lo cual queremos darle todo lo correspondiente del operador a v

$$(Lu, v) = -\int_\Omega \nabla \cdot (D(x)\nabla u)v + \int_\Omega \lambda(x)uv = \int_\Omega (\nabla v)^t D(x)\nabla u + \int_\Omega \lambda(x)uv$$

Ahora, $D(x)$ es simétrica por hipótesis, por lo que $D(x) = (D(x))^t$

$$= \int_\Omega (\nabla v)^t (D(x))^t \nabla u + \int_\Omega \lambda(x)uv = \int_\Omega (D(x)\nabla v)^t \nabla u + \int_\Omega \lambda(x)uv$$

$$= -\int_\Omega \nabla \cdot (D(x)\nabla v)u + \int_\Omega \lambda(x)uv = (u, L^\star v) = (u, Lv)$$

donde la última igualdad la obtenemos al identificar que las últimas integrales corresponden a identificar el operador L actuando sobre v y generar el producto escalar designado.

c) Muestre que para $\Omega = [0,1]^2$, si $D(x) = Id$, $\lambda(x) = -(2\pi m)^2 - (2\pi n)^2$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $f(x) = sin(2m\pi x)sin(2n\pi y)$, el problema homogeneo tiene solución.

Demostración:

La idea de esta pregunta es brindar un poco más de intuición de cómo usar la alternativa de Helmholtz.

Reescribamos el problema con los datos específicos de esta parte del problema

$$\begin{cases} -\triangle u - ((2\pi m)^2 + (2\pi n)^2)u = sin(2m\pi x)sin(2n\pi y), \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Tenemos que el teorema de la alternativa de Helmholtz es tal que sólo una de las siguientes es cierta, Consideremo el operador

$$L = -\triangle - ((2\pi m)^2 + (2\pi n)^2)$$

Se tiene que o bien $\forall f \in L^2(\Omega)$ el siguiente problema posee solución única

$$\begin{cases} Lu = f, \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde este problema tiene solución ssi $(f, v) = 0$, $\forall v \in N^\star$.

o bien $\exists u \in H_0^1(\Omega)$ no idénticamente nula, tal que

$$\begin{cases} Lu = 0, \text{ en } \Omega \\ u = 0, \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde denotemos $N = \ker L$ y $N^\star = \ker L^\star$, que poseerán dimensión finita e igual.

Por lo tanto si es posible resolver el problema adjunto homogeneo, encontrar la base de $N^\star$ y corroborar que $(f, v) = 0$ para toda la base, entonces el problema original no homogeneo tiene solución única. Si esto no ocurre, entonces el probema homogeneo tiene solución y el no homogeneo no tendrá solución.

Vemos que el operador L es autoadjunto, luego el problema adjunto homogeneo corresponde a

$$\begin{cases} -\triangle v - ((2\pi m)^2 + (2\pi n)^2)v = 0, \text{ en } \Omega \\ v = 0, \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Luego se tiene que $N^\star = span\{sin(2m\pi x)sin(2n\pi y), sin(2n\pi x)sin(2m\pi y)\}$, que posee dimensión 2 si $m \neq n$ y dimensión 1 si son iguales. Veamos que ocurre con el producto escalar de esta base con la función $f \in L^2$ definida anteriormente. Supongaos que $m \neq n$

1)

$$\int_0^1 \int_0^1 sin(2m\pi x)sin(2n\pi y)sin(2n\pi x)sin(2m\pi y)dxdy = 0$$

2)

$$\int_0^1 \int_0^1 sin(2m\pi x)sin(2n\pi y)sin(2n\pi x)sin(2m\pi y)dxdy$$

$$= \int_0^1 sin(2m\pi x)^2 dx \int_0^1 sin(2n\pi y)^2 dy = \frac{1}{4} \neq 0$$

Luego, la primera alternativa de Helmholtz no puede ser cierta, por tanto el problema homogeneo posee solución no trivial.

d) ¿Qué ocurre si $\lambda(x) = -(10\pi)^2 - (6\pi)^2$ y $f = cos(6\pi x)sin(7\pi x)$?

En este caso, vemos que la base del problema adjunto homogeneo es

$$N^\star = \{sin(10\pi x)sin(6\pi y), sin(6\pi x)sin(10\pi y)\}$$

Con esto, se tiene que $f \in L^2(\Omega)$ y $(f, v) = 0, \forall v \in N^\star$. Luego el problema no homogeneo posee solución única.

P2.- Consideremos $1 < p < \infty$ y una suceción uniformemente acotada $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Definamos el siguiente operador definido por coordenadas

$$[Tx]_i = \lambda_i x_i$$

a) Demuestre que T es compacto ssi $\lambda_n \longrightarrow 0$

Demostración:

$\Longrightarrow$

Supongamos que T es compacto y tomemos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(0,1)$ la base canónica.

Como T es compacto, sabemos por la definición de T que

$$T(e_n) = \lambda_n$$

deberá tener una subsuceción convergente. Luego $\{e_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es tal que $\lambda_{n_j} \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

Ahora supongamos que $\exists \{e_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que podemos suponer acotada inferiormente por $\alpha \neq 0$. Luego $T(e_{n_j}) = (0, .., \lambda_{n_j}, 0, ...)$ la cual no converge en l^p dado que no es de Cauchy.

Necesariamente toda subsiceción debe converger a 0.

$\Longleftarrow$

Supongamos que $\lambda \longrightarrow 0$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(0,1)$.

Como $\lambda \longrightarrow 0$, entonces, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |\lambda_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Luego sabemos que para una cantidad finita de cordenadas podemos encontrar una subsiceción convergente, por lo que elejimos una tal que las primeras N cordenadas converjan a las N coordenadas de $\bar{x} \in l^p$. Luego como λ_n y x_{n_j} son acotados

$$||T(x_{n_j}) - T(\bar{x})||^p \leq \sum_{j=1}^{N} |\lambda_{n_j}|^p |x_{n_j} - \bar{x}_{n_j}|^p + \sum_{j=1}^{N} |\lambda_{n_j}|^p |x_{n_j} - \bar{x}_{n_j}|^p \leq \epsilon$$

luego $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsuceción convergente. Luego T es compacto

b) Definamos la siguiente familia de operadores en l^2

$$T_n x = (\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{x_{n+2}}{2^{n+2}}, ...)$$

Demuestre que T_n son compactos.

Demostración:

Todo T_N se puede escribir como en a) donde $\lambda_n^N = \dfrac{1}{2^{N+n}}$, los cuales convergen a 0 $\forall N \in \mathbb{N}$. Luego por lo probado en a), son compactos

c) ¿Es la familia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en $\mathcal{L}(l^2, l^2)$?

Demostración:

La definición de los operadores T_n nos hace pensar que todos los elementos son puntualmente cada vez más pequeños, por lo que parece natral proponer como candidato el operador nulo como el límite

$$||T_N||_{\mathcal{L}(l^2,l^2)} = sup_{x\in\partial B(0,1)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|^2}{2^{N+n}} < \frac{1}{2^N}$$

Luego, los T_N convergen al operador nulo en $\mathcal{L}(l^2, l^2)$

d) Ahora consideremos la siguiente familia

$$S_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$$

¿Cómo es esta familia? ¿Son operadores compactos? ¿Son convergentes en algún sentido?

Demostración:

Dado que el rango de cada operador S_N es de dimensión finita, la imagen de cualquier suceción acotada será isomorfa a una suceción acotada en $\mathbb{R}^n$, por lo tanto $S_N(x_n)$ tendrá una subsuceción convergente, por tanto cada uno es un operador compacto.

Vemos que puntualmente S_N converge a la identidad de manera puntual, pero no en la norma de los operadores lineales, ya que

$$||T_N - Id|| = sup_{x\in\partial B(0,1)} \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2 \geq 1 > 0$$

Ya que $\forall N \in \mathbb{N}$ es posible tomar $x_n = (0, 0, ..., \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...) \in \partial B(0,1)$. Luego T_N no pueden converger en el espacio de fuciones lineals continuas.

[Nota:] Si hubiese sido efectiva la convergencia en el espacio de las funciones lineales continuas, al ser Id el límite uniforme de operadores compactos, entonces la imagen de la bola unitaria sería precompacta, lo cual contradice el hecho que l^2 tenga domensión infinita.

P3.- Sea $A = a_{i,j}$ matriz infinita simétrica de valores positivos tal que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{i,j}|^2 \leq \frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{i,j}|^2 \leq \frac{1}{2^{j+1}}$$

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{i,j}|^2 \leq \frac{1}{2}$$

Definamos el operador $Tu = Au$ sobre l^2

a) Demuestre que es un operador bien definido

Demostración:

Calculemos la normal en l^2 de $T(x)$ y veamos que esta es finita

$$||T(x)||_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_j|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^2)(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2) \leq \frac{1}{2}||x||_{l^2}^2$$

Por tanto $T \in \mathcal{L}(l^2, l^2)$

b) Demuestre que $Tu = u$ posee una cantidad finita de soluciones

Demostración:

Usaremos un argumento similar al de la P2.a. Consideremos las primeras N componentes y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(0,1)$. Luego como los $a_{i,j}$ convergen a 0, en cada una de las coordenadas es posible encontrar una subsuceción convergente.

Por lo tanto, como

$$|(T(x_n))_i|^2 = |\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_j|^2 \leq \frac{1}{2^i}||x||_{l^2}^2$$

Luego $\exists\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B(0,1)$ subsuceción convergente para las primeras N coordenadas. Luego si llamamos $\bar{x} \in B(0,1)$ al límite al cual las primeras N coordenadas convergen, se tiene que

$$||T(x_{n_k}) - \bar{x}||_{l^2}^2 \leq \sum_{i=1}^{N} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_j^{n_k} - \bar{x}_{n_k}|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_j^{n_k} - \bar{x}_{n_k}|^2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^{N+1}} \leq \epsilon$$

Luego el operador T es compacto. De acuerdo a lo anterior, se tiene que el kernel $N(T - Id)$ posee dimensión finita, por lo tanto la ecuación $Tu = u$ posee una cantidad finita de soluciones.

c) Encuentre $T^\star$

Demostración:

Calculemos como es el adjunto

$$(T(x), y) = \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_j)y_i = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_jy_i$$

dado que $a_{i,j}$ es simétrica, uniformemente acotada y $x, y \in l^2$, es posible conmutar los límites

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}x_jy_i = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_ja_{i,j}y_i = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_ja_{j,i}y_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(\sum_{i=1}^{\infty} a_{j,i}y_i) = (x, T^{\star}(x))$$

luego T es un operador autoadjunto y $T^{\star} = T$