Fabián Sepúlveda Soto

Ayudantía 5: Operadores compactos y Alternativa de Fredholm

05 de Octubre de 2022

P1.- Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D(x)\nabla u) + \lambda(x)u = f, \text{en } \Omega \\ u = 0, \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto conexo, $D(x)$ una matriz continua.

a) Muestre que es suficiente que

$$Min\{D_{11}(x), D_{22}(x)\} - \frac{D_{12}(x) + D_{21}(x)}{2} > \alpha > 0$$

para que el problema sea elíptico, y que si $\lambda(x) > \beta > 0$ entonces el problema se reduce a uno de minimización.

b) Demuestre que si $D(x)$ es simétrica que cumple la condición anterior, entonces $L = -\nabla \cdot (D(x)\nabla) + \lambda(x)$ es autoadjunto

c) Muestre que para $\Omega = [0,1]^2$, si $D(x) = Id$, $\lambda(x) = -(2\pi m)^2 - (2\pi n)^2$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $f(x) = sin(2m\pi x)sin(2n\pi y)$, el problema homogeneo tiene solución.

d) ¿Qué ocurre si $\lambda(x) = -(10\pi)^2 - (6\pi)^2$ y $f = cos(6\pi x)sin(7\pi x)$?

P2.- Consideremos $1 < p < \infty$ y una suceción uniformemente acotada $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Definamos el siguiente operador definido por coordenadas

$$[Tx]_i = \lambda_i x_i$$

a) Demuestre que T es compacto ssi $\lambda_n \longrightarrow 0$

b) Definamos la siguiente familia de operadores en l^2

$$T_n x = (\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{x_{n+2}}{2^{n+2}}, ...)$$

Demuestre que T_n son compactos.

c) ¿Es la familia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en $\mathcal{L}(l^2, l^2)$?

d) Ahora consideremos la siguiente familia

$$S_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$$

¿Cómo es esta familia? ¿Son operadores compactos? ¿Son convergentes en algún sentido?

P3.- Sea $A = a_{i,j}$ matriz infinita simétrica de valores positivos tal que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{i,j}|^2 \leq \frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}|^2 \leq \frac{1}{2^{j+1}}$$

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{i,j}|^2 \leq \frac{1}{2}$$

Definamos el operador $Tu = Au$ sobre l^2

a) Demuestre que es un operador bien definido

b) Demuestre que $Tu = u$ posee una cantidad finita de soluciones

c) Encuentre $T^\star$