Fabián Sepúlveda Soto

Pauta Ayudantía 4: Lax-Mlgram, Espacios de Sobolev y formulaciones débiles

12 de Septiembre de 2022

P1.- Demuestre que

$$\mathcal{B} = \{\frac{cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \{\frac{sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\}$$

es base Hilbertiana de $L^2([-\pi,\pi])$

Demostración:

Para demostrarlo usaremos que un conjunto es base Hilbertiana ssi es ortonormal y

Veamos que son ortonormales en $L^2(\Omega)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(nx)^2}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin(mx)^2}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{\pi} 2\pi \frac{1}{2} = 1$$

Ahora, veamos que ocurre con los términos cruzados

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(nx)}{\sqrt{2}\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sin(mx)}{\sqrt{2}\pi} dx = 0$$

Ahora, veamos que ocurre con la parte de $cos(nx)$ y $sin(mx)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sin(mx)dx = -\frac{1}{\pi}\frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)cos(mx)dx = -\frac{1}{\pi}\frac{m^2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sin(mx)dx$$

Luego

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sin(mx)dx = 0$$

Finalmente

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos((n-m)x) + cos((n+m)x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{sin((n-m)x)}{(n-m)} + \frac{sin((n+m)x)}{(n+m)}]|_{-\pi}^{\pi} = \delta_{n,m}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)sin(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos((n-m)x) - cos((n+m)x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{sin((n-m)x)}{(n-m)} - \frac{sin((n+m)x)}{(n+m)}]|_{-\pi}^{\pi} = \delta_{n,m}$$

luego es un sistema ortonormal. Supongamos que $\exists f \in L^2([-\pi,\pi])$ que es ortogonal a $\mathcal{B}$ y es no nula. Dada la densidad de $C_0^\infty([-\pi,\pi])$ en $L^2([-\pi,\pi])$ podemos escuger s.p.g. f continua y positiva. Como $[-\pi,\pi]$ es compacto, posee máximo (en $x_0 \in [-\pi,\pi]$), por lo cual $\exists \delta > 0 : f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ para $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Consideremos $s(x) = 1 + cos(x_0 - x) - cos(\delta)$, la cual es una combinación lineal finita de elementos en $\mathcal{B}$, por lo tanto mediante la hipótesis, $(f, s(x)^n) = 0$.

Vemos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se tiee que $s(x) > 1, \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

$$(f, s(x)^n) = \int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x)s(x)^n dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)s(x)^n dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x)s(x)^n dx$$

Como $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, para n suficientemente grande la primera y última integral convergerán a 0. Tomando $[a,b] \subseteq (x_0-\delta, x_0+\delta)$, se tiene que

$$\int_a^b f(x)s(x)^n dx \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)s(x)^n dx$$

Ahora, $s(x)$ es una función continua, por lo tanto como $[a,b]$ es compacto, también alcanza su mínimo m

$$\frac{f(x_0)}{2} m^n (b-a) \leq \int_a^b f(x)s(x)^n dx$$

Como $\delta > 0$, se tiene que $s(x) > 1 : x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, luego esto entra encontradicción con la ortogonalidad de f respecto a $\mathcal{B}$. Por lo tanto $f = 0$. $\mathcal{B}$ es base Hilbertiana.

P2.- Consideremos el siguiente problema de valor frontera

$$\begin{cases} \partial_{xxxx}u - \partial_{xx}u + \lambda(x)u = f \\ u'(0) = u'(1) = u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con $a < \lambda < b$ continua, con $a, b > 0$

a) Obtenga la formulación débil del problema de EDO.

Demostración:

Sea $\phi \in C_0^\infty([0,1])$. multiplicando por esta función test e integrando en el intervalo se tiene que

$$\int_0^1 \partial_{xxxx}u\phi dx - \int_0^1 \partial_{xx}u\phi dx + \int_0^1 \lambda(x)u\phi dx = \int_0^1 f\phi dx$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\phi \in C_0^\infty([0,1])$

$$\int_0^1 \partial_{xx}u\partial_{xx}\phi dx + \int_0^1 \partial_x u\partial_x\phi dx + \int_0^1 \lambda(x)u\phi dx = \int_0^1 f\phi dx$$

Teniéndose la formulación débil del problema.

El objetivo de las formulaciones débiles es obtener un funcional bilineal $a(u,v)$ lo más simétrico posible, de tal manera que pueda estar bien definido en el estpacio H donde se pretenden aplicar los teoremas de existencia y unicidad de este tipo de soluciones. Los espacios C_0^∞ carecen de la estructura de espacio de Hilbert, por lo cual no se puede asegurar sobre ellos que una EDP tenga o no solución única.

b) Defina el espacio H donde deben buscarse soluciones si $f \in L^2([0,1])$ y si $f \in H$

Demostración:

Dada la cantidad de derivadas débiles que debe poseer la formulación débil y las condiciones de borde nulo, el espacio de Sobolev adecuado para esta formulación será $H = H_0^2$, de forma tal qe los términos de borde que puedan sobrevivir de la integración por partes se anulen.

Consideremos los siguietes operadores

$$L(v) = \int_0^1 fvdx$$

Vemos que si $f \in L^2([0,1])$ o $f \in H_0^2([0,1])$, se puede acota de la siguiente manera mediante desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|L(v)| \leq \int_0^1 |f||v|dx \leq ||f||_{L^2([0,1])}||v||_{L^2([0,1])} \leq ||f||_{L^2([0,1])}||v||_{H_0^2([0,1])} \leq ||f||_{H_0^2([0,1])}||v||_{H_0^2([0,1])}$$

donde la última desigualdad tiene sentido si $f \in H_0^2([0,1])$, y la penúltima si $f \in L^2([0,1])$. Luego en ambos casos $L \in (H_0^2([0,1]))^\star$. Luego para definir el operador bilineal

$$a(u,v) = \int_0^1 \partial_{xx}u\partial_{xx}vdx + \int_0^1 \partial_x u\partial_x vdx + \int_0^1 \lambda(x)uvdx$$

El operador es claramete bilineal, por lo cual sólo falta ver si es continuo y coercivo.

$$|a(u,v)| \leq \int_0^1 |\partial_{xx}u||\partial_{xx}v|dx + \int_0^1 |\partial_x u||\partial_x v|dx + \int_0^1 |\lambda(x)||u||v|dx$$

$$\leq \int_0^1 |\partial_{xx}u||\partial_{xx}v|dx + \int_0^1 |\partial_x u||\partial_x v|dx + b\int_0^1 |u||v|dx$$

$$\leq max\{1,b\}[\int_0^1 |\partial_{xx}u||\partial_{xx}v|dx + \int_0^1 |\partial_x u||\partial_x v|dx + \int_0^1 |u||v|dx] \leq max\{1,b\}||u||_{H_0^2}||v||_{H_0^2}$$

Teniéndose la bicontinuidad deseada

Para la coercividad

$$|a(u,u)| = \int_0^1 |\partial_{xx}u|^2 dx + \int_0^1 |\partial_x u|^2 dx + \int_0^1 |\lambda(x)||u|^2 dx \geq \int_0^1 |\partial_{xx}u|^2 dx + \int_0^1 |\partial_x u|^2 dx + a\int_0^1 |u|^2 dx$$

$$\geq min\{1,a\}[\int_0^1 |\partial_{xx}u|^2 dx + \int_0^1 |\partial_x u|^2 dx + \int_0^1 |u|^2 dx] = min\{1,a\}(u,u)_{H_0^2}$$

Al buscar soluciones, dado que la formulación débil requiere que existan 2 derivadas débiles más, el espacio correcto si $f \in H_0^2([0,1])$, entonces $u \in H_0^{2+2}([0,1])$. Para $f \in L^2([0,1])$, entonces $u \in H_0^2([0,1])$.

c) Utilice el teorema de de Lax-Milgram para demostrar que si $f \in H$ entonces el problema posee soución débil. ¿Qué ocurre si $f \in L^2([0,1])$?

Demostración:

Como $H_0^2([0,1])$ es Hilbert, y $a(u,v)$ es una aplicación bicontinua, coerciva, y $L(v)$ es continuo, es posible aplicar Lax-Milgram por tato si $f \in H_0^2(0,1)$ entonces

$$a(u,v) = L(v), \forall v \in H_0^2([0,1])$$

Para el caso de $f \in L^2([0,1])$ es facil ver que $L \in (H_0^2([0,1]))^\star$ dadas las desigualdades sobre L que se obtuvieron en la parte anterior y aplicamos Lax-Milgram sobre $H_0^2([0,1])$, pero no se gana mayor regularidad.

P3.- Demuestre que si $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\phi = 0$$

entonces $v = 0$ c.t.p.

Demostración:

Supongamos por contradicción que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\phi = 0$$

pero $v \neq 0$ c.t.p.

Por tanto, sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida no nula que supondremos acotado por simplicidad, tal que $v|_U > 0$ s.p.g. y $v|_{U^c} = 0$ c.t.p.

Luego, es posible construir $\bar{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\bar{\phi}|_K = 1$$

y

$$\bar{\phi}|_{K^c} \geq 0$$

con $U \subseteq K$ y K compacto. Luego

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} v\bar{\phi} \geq \int_K v\bar{\phi} = \geq \int_K v \geq \int_U v > 0$$

contradiciendo la hipótesis inicial. v es 0 c.t.p.

P4.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto acotado conexo.

a) Demuestre que $\forall 1 < p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\bar{\Omega})$ y está compactamente contenido.

Demostración:

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Como posee una derivada débil, es posible realizar la siguiente identificación

$$|u(y) - u(x)| = |\int_x^y u^{'}(t)dt| \leq \int_x^y |u^{'}(t)|dt = \int_x^y |u^{'}(t)||1|dt$$

luego, como $u^{'} \in L^p(\Omega)$, por lo que es posible utilizar la desigualdad de Holder

$$\leq (\int_x^y |u^{'}(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} (\int_x^y |1|^q dt)^{\frac{1}{q}} \leq ||u^{'}||_{L^p(\Omega)} |y - x|^{\frac{1}{q}}$$

donde

$$q = \frac{p}{p-1}$$

Luego, $u \in C^{0,\frac{p-1}{p}}(\Omega)$, por lo que en particular es continua.

Para ver que la inclusión es compacta, supongamos que $\{u\} \subseteq B_{W^{1,p}(\Omega)}(0,1)$. Mediante el teorema de Arzela-Ascoli, $\{u\}$ es una familia precompacta dado que es una familia equicontinua y uniformemente acotada.

b) Demuestre que $W^{1,\infty}(\Omega)$ son funciones Lipschitz

Demostración:

Supongamos que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Luego

$$|u^{'}(t)| \leq ||u^{'}||_{L^\infty(\Omega)}, \text{c.t.p.}$$

Luego, del desarrollo anterior se tien que

$$|u(y) - u(x)| = |\int_x^y u^{'}(t)dt| \leq \int_x^y |u^{'}(t)|dt \leq ||u^{'}||_{L^\infty(\Omega)} \int_x^y |1|dt \leq ||u^{'}||_{L^\infty(\Omega)} |y - x|$$

Luego u debe ser Lipschitz.