Fabián Sepúlveda Soto

Ayudantía 4: Lax-Mlgram, Espacios de Sobolev y formulaciones débiles

12 de Septiembre de 2022

P1.- Demuestre que

$$\{\frac{cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\{\frac{sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\}_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\}$$

es base Hilbertiana de $L^2([-\pi,\pi])$

P2.- Consideremos el siguiente problema de valor frontera

$$\begin{cases}\partial_{xxxx}u-\partial_{xx}u+\lambda(x)u=f\\ u^{'}(0)=u^{'}(1)=u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

con $a<\lambda<b$ continua, con $a,b>0$

a) Obtenga la formulación débil del problema de EDO.

b) Defina el espacio H donde deben buscarse soluciones si $f\in L^2([0,1])$ y si $f\in H$

c) Utilice el teorema de de Lax-Milgram para demostrar que si $f\in H$ entonces el problema posee soución débil. ¿Qué ocurre si $f\in L^2([0,1])$?

P3.- Demuestre que si $\forall\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n}v\phi=0$$

entonces $v=0$ c.t.p.

P4.- Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ acotado.

a) Demuestre que $\forall 1<p\leq\infty$, $W^{1,p}(\Omega)\subseteq C(\bar{\Omega})$ y está compactamente contenido.

b) Demuestre que $W^{1,\infty}(\Omega)$ son funciones Lipschitz