Fabián Sepúlveda Soto

Pauta Ayudantía 3: Radon-Nikodym, Espacios de Hilbert, representación de Riesz-Frechet y Lax-Milgram

05 de Septiembre de 2022

P1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ acotado. Definamos el siguiente espacio

$$H = \Pi_{i=1}^{N} L^2(\Omega)$$

y la siguiente operación sobre $H \times H$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i v_i d\mu$$

a) Demuestre que (,) es producto punto bien definido.

Demostración:

Veamos que la operación propuesta cumple las propiedades del producto escalar.

Simetría:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i v_i d\mu = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} v_i u_i d\mu = (v, u)$$

No negatividad:

$$(u, u) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i^2 d\mu \geq 0$$

dado que $L^2(\Omega)$ lo definios sobre el cuerpo de los reals.

Nulidad del 0:

Si

$$(u, u) = 0$$

se tiene que $\forall i \in \{1, ..., N\}$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i^2 d\mu = 0$$

Pero este es el producto escalar de $L^2(\Omega)$, luego $\forall i \in \{1, ..., N\}, u_i = 0$.

Por lo tanto cumlpe con las propiedades del producto escalar. Para ver que está bien definido basta ver que todo elemento en particular de $L^2(\Omega)$ posee norma finita. Luego utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|(u,v)| \leq \sum_{i=1}^{N} ||u_i||_{L^2(\Omega)} ||v_i||_{L^2(\Omega)} < \infty$$

b) Demuestre que $(H, (\quad , \quad)^{1/2})$ es espacio de Hilbert.

Demostracón:

Sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es suceción de Cauchy, luego $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : ||u_k - u_l|| < \epsilon$. Eso implica que, dado que $(\quad , \quad)^{1/2}$ define una norma sobre H, por coordenada se tiene que $\forall i \in \{1, ..., N\}$

$$||u_k^i - u_l^i||_{L^2(\Omega)} < \epsilon$$

Luego dado que $L^2(\Omega)$ son Hilbert, entonces poseen límite por coordenadas, cuyo elemento construido es también elemnto de H. Luego en la de definición inicial de la suceción de Cauchy tomando ϵ/N

$$||u - u^j|| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |u_i - u_i^j|^2 d\mu < \epsilon$$

Teniéndose que $(H, (\quad , \quad)^{1/2})$ es efectivamente completo, y por tanto Hilbert.

c) Definamos el siguiente tensor por componente

$$A_{i,j}(x) = e^{-\dfrac{|x|^2}{i^2 + j^2 + 1}} + \delta_{i,j}$$

Demuestre que dados $u, \phi \in H$, el problema

$$Min_{v\in H}\{1/2 \int_\Omega u^\perp A v - (\phi, v)\}$$

siempre posee solución.

Demostración:

Consideremos la forma bilineal $a(u,v) = \int_\Omega u^\perp A v$ sobre H. Como Ω es acotado, se tiene que $\exists C > 0, \forall i, j \in \{1, ..., N\}$ tal que $A_{i,j}(x) > C$ dada la continuidad y positividad de la Gaussiana. Luego

$$|a(u,u)| > C \int_\Omega |u|^2 = C||u||_H^2$$

Luego es coerciva. Para ver la continuidad, es suficiente notar que la familia de Gaussianas están uniformemente acotadas por 1, luego

$$A_{i,j}(x) \leq 2$$

luego

$$|a(u,v)| \leq 2 \int_{\Omega} |u \otimes v| \leq 2||u||_H ||v||_H$$

Luego es continua. Además como A es simétrica, y H es espacio de Hilbert, es posible mediante Lax-Milgram caracterizar, dado $\phi \in H$, u como

$$1/2a(u,u) - (\phi, u) = Min_{v \in H}\{1/2 \int_{\Omega} u^{\perp} Av - (\phi, v)\}$$

Por tanto el problema de optimización posee solución

d) Es la forma bilineal $a(u,v) = \int_{\Omega} u^{\perp} Av$ posible escribirla como un producto punto del espacio H?

Demostración:

Dado lo demostrado en la parte c), se tiene que $a(u,v)$ es una forma bilineal, bicontinua y coerciva, se tiene que por Lax-milgram

$\forall \phi \in H^{\star}, \exists! u \in H$

$$a(u,v) = \phi(v)$$

Pero por el teorema de Riesz-Frechet, $\exists v_{\phi} \in H$

$$a(u,v) = \phi(v) = (v_{\phi}, v)$$

P2.- Sea l^2 el espacio de las sucesiones cuadrado sumables con el siguiente producto escalar

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

a) Demuestre que $(l^2, (\quad,\quad)^{1/2})$ es espacio de Hilbert.

Demostración:

Veamos que $(\quad,\quad)^{1/2}$ es un producto escalar bien definido

Simetría:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i = (y,x)$$

No negatividad:

$$(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq 0$$

Nulidad del 0: Si

$$(x,x)=0$$

entonces $\forall i\in\mathbb{N}, x_i=0$. Luego $x=0$. Además como l^2 corresponde a suceciones cuadrado sumables, esta operación siemrpe es finita.

Sea $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ suceción de Cauchy. Por lo tanto $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ tal que

$$||x^i-x^j||_{l^2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^i-x_n^j|^2<\epsilon^2$$

Cada una de las coordenadas es en particular una suceción de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo tanto posee límite por coordenada x_n. Luego, mediante axioma de elección, escogemos por coordenada

$$|x_n^i-x_n|^2<\frac{\epsilon^2}{2^{2n+1}}$$

Luego

$$||x^i-x||_{l^2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^i-x_n|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon^2}{2^{2n+1}}<\epsilon^2$$

Ahora falta ver que $x\in l^2$

$$||x||_{l^2}^2\le||x-x_n||_{l^2}^2+||x_n||_{l^2}^2<M+\epsilon$$

Ya que la suceción al converger en l^2 es enparticular acotada

b) Definamos $X_N=span\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}:x_n=0,\quad \text{si}\quad n\neq N\}$

Demuestre que

$$l^2=\oplus_{N\in\mathbb{N}}X_N$$

Demostración:

Vemos que por la definición $\{X_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ son todos ortogonales con el producto escalar definido sobre l^2. Veamos que $span(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}X_N)$ es denso en l^2.

En efecto, como l^2 coresponde a suceciones cuadrado sumables, sea $x\in l^2$, $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^2<\epsilon^2$$

luego construyendo $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_i=x_i,\forall i\in\{1,...,N\}$, se tiene que

$$||\bar{x}-x||_{l^2}^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^2<\epsilon^2$$

y $\bar{x} \in span(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} X_N)$ ya que corresponde a un elemento generado a base de una combinación lineal finita de componentes no nulas. Luego $span(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} X_N)$ es denso en l^2, por tanto es suma de Hilbert.

c) Cómo es el generado por los subespacios X_N?

Demostración:

Sea $x \in span(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} X_N)$. Esto implica que al ser X_N subespacios de dimensión finita, su generado contendrá elementos x tales que sólo una cantidad finita de componentes son no nulas. Luego el generado corresponde a los elementos de l^2 tales que poseen una cantidad finita de componentes no nulas.

P3.- Sea H espacio de Hilbert

a) Demuestre que $H^\star$ es Hilbert.

Demostración:

Sea $l \in H^\star$. Como H es espacio de Hilbert, mediante el teorema de representación de Riesz-Frechet, $\exists! u_l \in H$ tal que $l(u) = (u, u_l), \forall u \in H$ y $||l||_{H^\star} = ||u_l||_H$.

Definamos el siguieente producto escalar sobre $H^\star$

$$[f, g] = (u_f, u_g)$$

donde u_f y u_g son los representantes de Riesz-Frechet correspondientes. Veamos que las normas son equivalentes. Sea $l \in H^\star$

$$||l||_{H^\star} = sup_{u\in H, ||u||_{H^\star}=1}\{|l(u)|\} = sup_{u\in H, ||u||_{H^\star}=1}\{|(u_l, u)|\} = |(u_l, u_l)|^{1/2} = |[l, l]|^{1/2}$$

Luego como $H^\star$ es completo, con el producto escalar termina siendo Hilbert.

b) Demuestre que la bola unitaria en H es $\sigma(H, H^\star)$-compacta

HINT: Utilice el teorema de Kakutani [H reflexivo ssi $B(0, 1)$ es $\sigma(H, H^\star)$-compacta]

Demostración: Definamos la siguiente función

$$\Phi_1 : H \Longrightarrow H^\star$$

$$\Phi_1(u) = f_u = (\cdot, u)$$

Dado el teorema de representación de Riesz-Frechet, esta función es biyectiva, y dado el producto escalar antes definido en $H^\star$ lo hace Hilbert (en aprticular Banach), por el teorema de la aplicación inversa, se tiene que es de inversa continua.

Ahora definamos

$$\Phi_2 : H^\star \Longrightarrow H^{\star\star}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\Phi_2 o \Phi_1(u) = \Phi_2(f_u) = [\cdot, f_u] = (\cdot, u) = J(u)$$

Luego se tiene que $\Phi_2 o \Phi_1 = J$, la inyección canónica, y por composición de funciones biyectivas continuas de inversa continua, H y $H^{\star\star}$ son isomorfos (J es biyectiva), haciendo de H un espacio reflexivo.

Por el teorema de Kakutani, un espacio reflexivo lo es ssi su bola unitaria cerada (todo conjunto cerrado acotado) es $\sigma(H, H^\star)$-compacta.

P4.- Sea $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, \mu)$ los reales positivos con la medida de Lebesgue.

Consideremos la sub σ-álgebra

$$\mathcal{A} = \sigma(\{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(1, \infty)\})$$

y sea λ una medida sobre $\mathcal{A}$. Encontrar g que sea $\mathcal{A}$-medible tal que

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu$$

Demostración:

Dadas las hipótesis uno estaría tentado a utilizar directamente Radon-Nikodym, pero la σ-álgebra sobre la que está definida λ no es la misma que los borelianos. De hecho, al ser conjuntos disjuntos, cualquier conjunto medible en $\mathcal{A}$ puede ser descrito como unión numerable de los elementos generadores de $\mathcal{A}$. Luego basta ver como se comporta la medida sobre la base de la sub σ-álgebra. Proponemos una función $\mathcal{A}$-medible simple

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n 1_{E_n}(x)$$

donde c_n dependen de λ y μ. Luego, para cualquier conjunto medible $E_n \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E_n) = \int_{E_n} c_n 1_{E_n}(x) d\mu(x) = c_n \int_{E_n} 1_{E_n}(x) d\mu(x) = c_n \mu(E_n)$$

Si $E_n = (0, \infty)$, entonces, $\mu((0, \infty)) = \infty$, luego $\lambda((0, \infty)) = \infty$ para poder definir bien la derivada de Radon-Nikodym, luego podemos elegir su coeficiente como 1.

De lo contrario $E_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, por tanto

$$\lambda(E_n) = c_n \frac{1}{n(n+1)}$$

por lo tanto

$$g(x) = 1_{(0,\infty)}(x) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(E_n) n(n+1) 1_{E_n}(x)$$

es una función $\mathcal{A}$-medible que satisface la relación entre λ y μ.