Fabián Sepúlveda Soto

Ayudantía 3: Radon-Nikodym, Espacios de Hilbert, representación de Riesz-Frechet y Lax-Milgram

05 de Septiembre de 2022

P1.- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Definamos el siguiente espacio

$$H = \Pi_{i=1}^{N} L^2(\Omega)$$

y la siguiente operación sobre $H \times H$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} u_i v_i d\mu$$

a) Demuestre que $(\quad,\quad)$ es producto punto bien definido.

b) Demuestre que $(H, (\quad,\quad)^{1/2})$ es espacio de Hilbert.

c) Definamos el siguiente tensor por componente

$$A_{i,j}(x) = e^{-\dfrac{|x|^2}{i^2+j^2+1}} + \delta_{i,j}$$

Demuestre que dados $u, \phi \in H$, el problema

$$Min_{v \in H}\{\int_{\Omega} u^{\perp} Av - (\phi, v)\}$$

siempre posee solución.

d) Es la forma bilineal $a(u, v) = \int_{\Omega} u^{\perp} Av$ posible escribirla como un producto punto del espacio H?

P2.- Sea l^2 el espacio de las sucesiones cuadrado sumables con el siguiente producto escalar

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

a) Demuestre que $(l^2, (\quad,\quad)^{1/2})$ es espacio de Hilbert.

b) Definamos $X_N = span\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n = 0, \quad \text{si} \quad n \neq N\}$

Demuestre que

$$l^2 = \oplus_{N\in\mathbb{N}} X_N$$

c) Cómo es el generado por los subespacios X_N ?

P3.- Sea H espacio de Hilbert

a) Demuestre que $H^\star$ es Hilbert.

b) Demuestre que la bola unitaria en H es $\sigma(H, H^\star)$-compacta

HINT: Utilice el teorema de Kakutani [H reflexivo ssi $B(0,1)$ es $\sigma(H, H^\star)$-compacta]

P4.- Sea $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, \mu)$ los reales positivos con la medida de Lebesgue.

Consideremos la sub σ-álgebra

$$\mathcal{A} = \sigma(\{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(1, \infty)\})$$

y sea λ una medida sobre $\mathcal{A}$. Encontrar g que sea $\mathcal{A}$-medible tal que

$$\lambda(E) = \int_E g d\mu$$