

Fabián Sepúlveda Soto

Pauta Ayudantía 2: Teorema de Baire, Aplicación abierta y grafo cerrado

29 de Agosto de 2022

P1.- Sea X espacio de Banach que admite una base de Schauder. Demuestre que X es separable.

Demostración:

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de Schauder del espacio X que tomaremos normalizada por simplicidad, por lo cual $\forall x \in X, \exists \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i\| = 0$.

Ahora, para la construcción del conjunto denso numerable consideremos $D = \mathbb{Q} \times \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, el cual por ser producto finito de conjuntos numerables posee cardinalidad numerable, y definamos la siguiente inyección:

$$L : D \longrightarrow X$$

$$L(q_i, x_j) = q_i x_j$$

donde $L(D)$ es un conjunto numerable en X . Ahora sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Dado que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base de Schauder. Ahora, como $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_i$, entonces por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, por axioma de elección, $\forall i \in \mathbb{N}, |\alpha_i - q_i| < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$, luego

$$\sum_{i=1}^N |\alpha_i - q_i| \leq \epsilon$$

luego tomando el límite de N tendiendo a ∞

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i - q_i| \leq \epsilon$$

por lo tanto

$$\|x - \sum_{i=1}^{\infty} q_i x_i\| = \|\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_i - \sum_{j=0}^{\infty} q_j x_j\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i - q_i| < \epsilon$$

Luego $L(D)$ es un conjunto denso numerable en X , por lo tanto X es separable.

P2.- Demuestre que toda base de Hamel un espacio de Banach de dimensión infinita es no numerable.

Demostración:

Supongamos por contradicción que para X espacio de Banach existe una base de Hamel numerable.

Definamos los siguientes subespacios vectoriales

$$X_N = \cup_{i=1}^N \overline{\text{span}}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$$

corresponden a subespacios cerrados de dimensión finita. Al ser $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de Hamel de X , entonces es claro que

$$X = \cup_{N \in \mathbb{N}} X_N$$

Una inclusión es directa, la otra se explica por Hanh-Banach, dado que al ser base de Hamel, si la inclusión no trivial se tiene que es posible separar estrictamente la unión infinita de un punto que no se encuentre en esta, pero esto contradice que posea base de Hamel.

Ahora, por el teorema de Baire, al poder escribir X como unión numerable de cerrados, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(X_{N_0}) \neq \emptyset$. Luego X_{N_0} es un subespacio vectorial de dimensión finita, pero $\dim(x)$ es infinita, luego no puede tener interior no vacío, por lo tanto X no puede tener base de Hamel numerable.

Otra línea de pensamiento puede ser, dado que X_N son subespacios vectoriales cerrados de dimensión finita en un espacio de dimensión infinita, entonces todos poseen interior vacío. Luego por ser $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de Hamel de X , entonces

$$X = \cup_{N \in \mathbb{N}} X_N$$

Pero X no puede ser unión numerable de conjuntos con interior vacío. Luego X no puede tener base de Hamel numerable.

P3.- a) Definimos l^2 como el espacio de sucesiones tales que

$$x \in l^2, \text{ entonces } \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty$$

y definimos la función shift como

$$S : l^2 \longrightarrow l^2$$

$$(S(x))_n = (x)_{n+1}$$

Demuestre que S es una aplicación abierta

Demostración:

a) Veamos primero que S es continua.

Sean $x, y \in l^2$. Se tiene que

$$\|S(x) - S(y)\| = \sum_{n=2} |x_n - y_n|^2 \leq \sum_{n=1} |x_n - y_n|^2 = \|x - y\|$$

Luego al ser Lipschitz es continua.

Sea $y \in l^2$. Veamos que S es sobreyectiva (epiyectiva). Construyamos el siguiente elemento

$$x = (0, y)$$

donde $x_1 = 0$ y $x_{i+1} = y_i, \forall i \geq 1$. Luego por la construcción $x \in l^2$ y $S(x) = y$, por lo tanto S es sobreyectiva.

Además, como l^2 es Hilbert, y por lo tanto Banach, es posible utilizar el teorema de la aplicación abierta.

Luego S es aplicación abierta.

b) Demuestre que l^2 es separable.

Demostración:

Tomemos el siguiente conjunto $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\bar{x}_n = \{\delta_{nm}\}_m$ de l^2 . Por la manera en que están contruidos, son l.i. Veamos que es base de Schaudner.

Dada la definición del espacio l^2 , si $x \in l^2$ se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^2 < \epsilon$. Luego, es posible construir una sucesión α_n tal que $x - \sum_{n=1}^N \alpha_n \bar{x}_n = (0_N, x_{N+1}, \dots)$.

Luego, dado que $x \in l^2$, se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - \sum_{n=1}^N \alpha_n \bar{x}_n\| < \epsilon$$

por lo que $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base de Schauder. luego por lo probado en P1, se tiene que l^2 es separable.

c) Demuestrte que l^2 admite un subespacio denso con base de Hamel.

Demostración:

Por lo probado en b), vemos que $\bar{x}_n = \{\delta_{nm}\}_m$ de l^2 es un conjunto l.i., y que dada la definición del espacio l^2 y su norma, se tiene que siempre se puede encontrar un elemento $y = \sum_{n=1}^N \alpha_n \bar{x}_n$ que aproxime lo suficiente a x .

Con lo anterior, el espacio generado por las combinaciones lineales de $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en l^2 . Por lo tanto l^2 posee una base de Hamel

d) Qué ocurre con l^∞ ?

Demostración:

Dado lo demostrado en a), la aplicación shift seguirá siendo continua, lipschitz, sobreyectiva y abierta.

Dado que si $x \in l^\infty$, entonces

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty$$

no se puede asegurar la construcción de las bases de Hamel y Schauder. De hecho siempre se puede construir un elemento que esté lo suficientemente lejos de los generados por las bases.

P4.- Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de probabilidad. Sea el espacio $(L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))$ dotado con la siguiente topología:

$$\|(f, g)\|_{L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)} = \|f\|_{L^p}^2 + \|g\|_{L^q}^2.$$

tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definamos el siguiente operador

$$\kappa : L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\kappa(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x)$$

a) Demuestre que κ está bien definido, es continuo y abierto.

Demostración:

Dada la definición de las normas en $L^p(\Omega)$, se tiene que

$$|\kappa(f, g)| = \left| \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x) \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)||g(x)|d\mu(x)$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, dado que $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, siendo p y q conjugados de Holder, se tiene que

$$\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

luego usando la relación entre la media aritmética y media geométrica obtenemos que

$$\leq \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^q(\Omega)}^2) \leq (\|f\|_{L^p(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^q(\Omega)}^2)$$

Luego κ está bien definido y es continuo para la norma del espacio producto. Veamos que es sobreyectivo.

Sea α que tomaremos positivo s.p.g. Luego tomemos $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} f(x)d\mu(x) = \alpha$$

Se tiene que $f^{1/p} \in L^p(\Omega)$ y $f^{1/q} \in L^q(\Omega)$ ya que

$$\left(\int_{\Omega} |f(x)^{1/p}|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \|f\|_{L^1(\Omega)}^{1/p} < \infty$$

Luego $\exists (f^{1/p}, f^{1/q}) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))$ tal que $\kappa(f^{1/p}, f^{1/q}) = \alpha$

Si $\alpha < 0$, entonces podemos construir $(-f^{1/p}, f^{1/q}) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))$. Por lo tanto κ es sobreyectivo.

Veamos que el espacio producto dotado con esa norma es Banach.

Sea $\{(f_i, g_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ suceción de Cauchy. Por lo tanto $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$ y $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^q(\Omega)$, por tanto poseen límites en sus espacios correspondientes f y g .

Ahora sea $\epsilon > 0$ tal que tomamos $N = \max\{N_f, N_g\}$ para las subsucesiones convergentes f_{i_k} y g_{j_k} tales que

$$\|f_{i_k} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\epsilon^{1/2}}{\sqrt{2}}$$

$$\|g_{j_k} - g\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{\epsilon^{1/2}}{\sqrt{2}}$$

luego se tiene que

$$\|(f_{i_k}, g_{j_k}) - (f, g)\|_{L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)} = \|f_{i_k} - f\|_{L^p(\Omega)}^2 + \|g_{j_k} - g\|_{L^q(\Omega)}^2 \leq \epsilon$$

Luego la suceción de Cauchy original converge en el espacio producto a un límite dentro de este por unicidad del límite. Luego el espacio definido con su norma es Banach.

Luego por el teorema de la aplicación abierta, κ es abierta.

b) Ahora sea $(f, g) \in B_{L^p}(0, 1) \times B_{L^q}(0, 1)$.

$$K(f, g) : L^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$K_{(f,g)}(\alpha) = \int_{\Omega} \alpha(x) f(x) g(x) d\mu(x)$$

Demuestre que $\{K_{(f,g)}\}_{(f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)}$ es uniformemente acotado.

Demostración:

Probemos primero que $K_{f,g}$ son operadores lineales. Sean $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} K_{(f,g)}(\alpha + c\beta) &= \int_{\Omega} (\alpha(x) + c\beta(x)) f(x) g(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} \alpha(x) f(x) g(x) d\mu(x) + c \int_{\Omega} \beta(x) f(x) g(x) d\mu(x) \\ &= K_{(f,g)}(\alpha) + cK_{(f,g)}(\beta) \end{aligned}$$

Sea $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, luego

$$\begin{aligned} |K_{(f,g)}(\alpha)| &\leq \int_{\Omega} |\alpha(x)| |f(x)| |g(x)| d\mu(x) \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| d\mu(x) \\ &\leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

luego la cota del lado derecho no depende de (f, g)

$$\sup_{(f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)} |K_{(f,g)}\alpha| < \infty, \forall \alpha \in L^\infty(\Omega)$$

Luego $\{K_{(f,g)}\}_{(f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)}$ es una familia de operadores lineales continuos tal que su supremo es finito $\forall \alpha \in L^\infty(\Omega)$.

Ahora, como $L^\infty(\Omega)$ es Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus

$$\sup_{(f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)} \|K_{(f,g)}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Omega), \mathbb{R})} < \infty$$

haciendo a la familia uniformemente acotada.

c) Demuestre mediante el Teorema del Grafo cerrado que $K_{(f,g)}$ es continua $\forall (f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)$

Demostración:

Consideremos el grafo de $K_{(f,g)}$. Sea $(K_{(f,g)}\alpha_n, \alpha_n)$ sucesión tal que $(\alpha_n, K_{(f,g)}\alpha_n) \rightarrow (\alpha, a)$ en la topología producto.

Por lo tanto, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \|(\alpha_n, K_{(f,g)}\alpha_n) - (\alpha, a)\| < \epsilon$

Por lo tanto

$$|K_{f,g}(\alpha) - a| \leq |K_{f,g}(\alpha) - K_{f,g}(\alpha_n)| + |K_{f,g}(\alpha_n) - a|$$

Ahora, como $(f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)$, se tiene que

$$|K_{f,g}(\alpha) - K_{f,g}(\alpha_n)| \leq \|\alpha_n - \alpha\|_{L^\infty}$$

Por lo tanto dada la convergencia de la sucesión tomada

$$|K_{f,g}(\alpha) - a| \leq 2\epsilon$$

Luego $K_{(f,g)}(\alpha) = a$, por tanto el Grafo es cerrado bajo la topología producto, y como $\mathbb{R}$ y $L^\infty(\Omega)$ son Banach, la familia $K_{f,g}$ es continuo.

P5.- Sea E espacio de Banach.

Demuestre que E es reflexivo ssi la bola unitaria es compacta en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

Demostración:

$\Rightarrow$

Supongamos que E es reflexivo. Luego la inyección canónica $J : E \rightarrow E^{**}$ es biyectiva. Por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, aplicado sobre E^* , se tiene que la bola unitaria de E^{**} es compacta con $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Ahora J es biyectiva, por lo tanto por los teoremas de la aplicación abierta e inversa, J y J^{-1} son abiertas y continuas. Luego $J^{-1}(B_{E^{**}}(0,1)) = B_E(0,1)$ es compacta en $\sigma(E, E^*)$.

$\Leftarrow$

Ahora supongamos que la bola unitaria es débil-compacta. La inyección canónica es siempre continua con las topologías $\sigma(E, E^*)$ y $\sigma(E^{**}, E^*)$ ya que $\forall f \in E^*$ se tiene que la aplicación

$$J_x(f) = f(x)$$

es continua respecto a $\sigma(E, E^*)$. Ahora, dado que J es isometría continua para la topología $\sigma(E^{**}, E^*)$, entonces $J(B_E(0, 1))$ es compacta en $\sigma(E^{**}, E^*)$, y por el teorema de Goldstein $J(B_E(0, 1))$ es densa en $B_{E^{**}}(0, 1)$. Luego $J(B_E(0, 1)) = B_{E^{**}}(0, 1)$, y por tanto $J(E) = E^{**}$, haciéndolo reflexivo.