**Fabián Sepúlveda Soto**

# Ayudantía 2: Teorema de Baire, Aplicación abierta y grafo cerrado

29 de Agosto de 2022

**P1.-** Sea $X$ espacio de Banac que admite una base de Schauder. Demuestre que $X$ es separable.

**P2.-** Demuestre que toda base de Hamel un espacio de Banach de dimensión infinita es no numerable.

**P3.-** a) Definimos $l^2$ como el espacio de suceciones tales que

$$x \in l^2, \text{ entonces } \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|2 < +\infty$$

y definimos la función shift como

$$S : l^2 \longrightarrow l^2$$

$$(S(x))_n = (x)_{n+1}$$

Demuestre que $S$ es una aplicación abierta

b) Demuestre que $l^2$ es separable.

c) Demuesrte que $l^2$ admite un subespacio denso con base de Hamel.

d) Qué ocurre con $l^\infty$?

**P4.-** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de probabilidad. Sea el espacio $(L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))$ dotado con la siguiente topología:

$$||(f,g)||_{L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)} = ||f||^2_{L^p} + ||g||^2_{L^q}.$$

tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Definamos el siguiente operador

$$\kappa : L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\kappa(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x)$$

a) Demuestre que $\kappa$ está bien defindo, es continuo y abierto.

Ahora sea $(f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)$.

$$K_{(f,g)} : L^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$K_{(f,g)}(\alpha) = \int_\Omega \alpha(x) f(x) g(x) d\mu(x)$$

b) Demuestre que $\{K_{(f,g)}\}_{(f,g)\in B_{L^p}(0,1)\times B_{L^q}(0,1)}$ es uniformemente acotado.

c) Demuestre mediante el Teorema del Grafo cerrado que $K_{(f,g)}$ es continua $\forall (f,g) \in B_{L^p}(0,1) \times B_{L^q}(0,1)$

**P5.-** Sea $E$ espacio de Banach.

Demuestre que $E$ es reflexivo ssi la bola unitaria es compacta en la topología débil $\sigma(E, E^\star)$.