Fabián Sepúlveda Soto

Ayudantía 1: Espacios de Banach y Teo. de Hanh-Banach

22 de Agosto de 2022

P1.- Sea (X, d) un espacio métrico y definamos

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}$$

Demostrar que $(C_b(X), ||\ ||_\infty)$ es espacio de Banach.

Demostración:

Veamos que $C_b(X)$ corresponde a un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ bien definido. Sean $f, g \in C_b(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$|\alpha f(x) + g(x)| \leq |\alpha||f(x)| + |g(x)| \leq |\alpha|||f||_\infty + ||g||_\infty < +\infty$$

Luego $C_b(X)$ es un espacio vectorial bien definido.

Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ suceción de Cauchy. Por definición, $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j >\geq N$ se tiene que

$$||f_i - f_j||_\infty < \epsilon$$

Sea $x \in X$. Vemos que $|f_i(x) - f_j(x)| \leq ||f_i - f_j||_\infty < \epsilon$ es suceción de Cauchy en $\mathcal{R}$, luego posee límite puntual que designaremos por $f(x)$. Sólo falta ver que es continua y acotada.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suceción tal que $x_n \to x$. Tomando para la suceción de Cauchy y la continuidad de las funciones f_i como tolerancia uniforme $\epsilon/3$, podemos hacer el siguiente Nikita-Nipone

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n) - f_i(x_n)| + |f_i(x_n) - f_i(x)| + |f_i(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Luego la función $f(x)$ construida es continua. Para ver que es acotada, utilizaremos la continuidad de la norma del espacio. Dado que f_i es de Cauchy, es posible encontrar N tal que

$$||f_N - f_i||_\infty \leq 1/2$$

con $||f_N||_\infty \leq C$

Luego, dado que la norma es una aplicaicón continua sobre $C_b(X)$, se tiene uqe

$$||f - f_N||_\infty = lim_{n\to\infty}||f_N - f_n||_\infty \leq 1/2$$

luego

$$||f||_\infty = ||f - f_N||_\infty + ||f_N||_\infty \leq 1/2 + C$$

Luego $f \in C_b(X)$, siendo espacio de Banach.

P2.- Definamos $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea

$$k : \Omega \times \Omega \to R, \mathcal{F} \times \mathcal{F}\text{medible}$$

tal que

$$\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(y) \leq c_1$$

$$\int_\Omega |k(x,y)| d\mu(x) \leq c_2$$

y definimos el siguiente operador

$$\kappa : (L^p(\Omega), || \quad ||_p) \to (L^p(\Omega), || \quad ||_p)$$
$$\kappa f(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y) d\mu(y)$$

Demostrar que κ es lipschitz, que $\kappa \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$ y que $||\kappa||_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq c_1^{1/q} c_2^{1/p}$, donde $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p} = 1$.

Demostración:

Calculemos la norma L^p del operador aplicado sobre un elemento del dominio.

$$||\kappa f||_{L^p}^p \leq \int_\Omega | \int_\Omega k(x,y) f(y) d\mu(y)|^p d\mu(x) \leq \int_\Omega (\int_\Omega |k(x,y)||f(y)| d\mu(y))^p d\mu(x)$$

Dado que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, se tiene que $|k(x,y)| = |k(x,y)|^{1/q} |k(x,y)|^{1/p}$, teniéndose

$$= \int_\Omega (\int_\Omega |k(x,y)|^{1/q} |k(x,y)|^{1/p} |f(y)| d\mu(y))^p d\mu(x)$$

donde podemos utilizar la desigualdad de Schwarz

$$\leq \int_\Omega (\int_\Omega (|k(x,y)|^{1/q})^q d\mu(y))^{p/q} (\int_\Omega (|k(x,y)|^{1/p})^p |f(y)|^p d\mu(y))^{p/p} d\mu(x)$$

$$\leq c_1^{p/q} \int_\Omega \int_\Omega |k(x,y)||f(y)|^p d\mu(y) d\mu(x)$$

Luego utilizando Fubbini es posible reordenar los términos, ya que $f \in L^p(\Omega)$

$$\leq c_1^{p/q} \int_\Omega |f(y)|^p \int_\Omega |k(x,y)| d\mu(x) d\mu(y) \leq c_1^{p/q} c_2 ||f||_{L^p(\Omega)}^p$$

Luego reordenando las desigualdades se tiene que

$$||\kappa f||_{L^p(\Omega)}^p \leq c_1^{p/q} c_2 ||f||_{L^p(\Omega)}^p$$

Luego tomando raiz p-ésima se tiene que

$$||\kappa f||_{L^p(\Omega)} \leq c_1^{1/q} c_2^{1/p} ||f||_{L^p(\Omega)}$$

demostrando que el operador κ es Lipschitz y por tanto continuo sobre $L^p(\Omega)$.

Además se tiene que, para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\kappa(\alpha f + g)(x) = \int_\Omega k(x,y)(\alpha f(y) + g(y))d\mu(y)$$

$$= \alpha \int_\Omega k(x,y)f(y)d\mu(y) + \int_\Omega k(x,y)g(y)d\mu(y) = \alpha\kappa f(x) + \kappa g(x)$$

llegando a que $\kappa \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$. Ahora, con la última desigualdad, tomando supremo sobre $||f||_{L^p} \leq 1$, se llega a la norma del operador κ

$$||\kappa||_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq c_1^{1/q} c_2^{1/p}$$

llegando a la desigualdad pedida.

P3.- Sea E espacio de Banach y $E^\star$ su dual correspondiente. Demuestre que si $E^\star$ es separable, entonces E es separable.

Demostración:

Sea $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso numerable en $E^\star$ que tomaremos normalizado s.p.g.

Notemos que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E$ tal que $< l_n, x_n > \geq 1/2$ que lo tomaremos normalizado, sino reescalaremos l_n para que esto ocurra.

Definamos $M = span\{x_n\}$. Supongamo por contraducción que $\bar{M} \neq E$. Luego existe $x_0 \in E$ que no está en M. Por Hanh-Banach, existe $l \in E^\star$ tal que $||l|| = 1$ tal que separa M y x_0 tal que l se anula en M.

Ahora, dada la construcción de l_n, se tiene que

$$1/2 \leq |< l_n, x_n >| = |< l_n, x_n > - < l, x_n >|$$

ya que l se anula en M. Luego

$$\leq ||l_n - l|| \quad ||x_n|| = ||l_n - l||$$

Luego, encontramos un elemento en $E^\star$ que se encuentra suficientemente lejos del conjunto numerable denso, lo que contradice nuestra hipótesis base.

Luego sólo puede ser correcto que $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ sea denso en E.

P4.- Sea Y subespacio vectorial propio cerrado de X espacio de Banach. Sea $u \in X \setminus Y$ tal que $dist(u, Y) = \rho$. Demuestre que existe $l \in X^\star$ tal que $Y \subseteq ker(l)$, $l(u) = 1$ y que $||l|| = \rho^{-1}$.

Demostración:

Definamos la siguiente función

$$\kappa : span\{u\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\kappa(\lambda u) = \lambda$$

Por se una función lieal en dimensión finita es continua y bien definida. Definamos nuestro candidato a cuasi-seminorma como

$$p : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p(x) = \rho^{-1} dist(x, Y)$$

La primera propiedad de las cuasi-seminormas se cumple por la propiedad triangular de la distancia

$$p(x + y) = \rho^{-1} dist(x + y, Y) \leq \rho^{-1} dist(x, Y) + \rho^{-1} dist(y, Y) = p(x) + p(y)$$

La segunda propiedad, dado que Y es espacio vectorial, para $\lambda \geq 0$ se puede hacer el siguiente cambio de variable

$$p(\lambda x) = \rho^{-1} dist(\lambda x, Y) = \rho^{-1} Inf_{y \in Y}\{||\lambda x - y||\} = \rho^{-1} Inf_{\bar{y} \in Y}\{||\lambda x - \lambda \bar{y}||\}$$

$$= \lambda \rho^{-1} Inf_{\bar{y} \in Y}\{||x - \bar{y}||\} = \lambda p(x)$$

Ahora, vemos que $span\{u\} = \{x \in X : x = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Luego se tiene la siguiente desigualdad natural sobre este subespacio generado

$$p(\lambda u) = \rho^{-1} dist(\lambda u, Y) \geq |\lambda| \rho^{-1} dist(u, Y) = |\lambda| \rho^{-1} \rho = |\lambda| = |\kappa(\lambda u)|$$

Luego, κ es una función lineal definida en un subespacio de X acotada por una cuasi-seminorma, por tanto al usar el teorema de Hanh-Banach de extensión, $\exists l \in X^\star$ que extiende κ.

Vemos que por ser extensión, dado que $\kappa(u) = 1$, entonces $l(u) = 1$.

Ahora, sea $y \in Y$. Luego por la definición de la cuasi-seminorma

$$|l(y)| \leq p(y) = \rho^{-1} dist(y, Y) = 0$$

Por lo tanto $Y \subseteq ker(l)$. Ahora, dado que Y es subespacio vectorial, entonces $0 \in Y$, luego $\forall x \in X$

$$|l(x)| \leq p(x) = \rho^{-1} dist(x,Y) = \rho^{-1} Inf_{y\in Y} ||x-y|| \leq \rho^{-1}||x||$$

Luego tomando supremo sobre $||x|| \leq 1$ se tiene que

$$||l|| \leq \rho^{-1}$$

Para la otra desigualdad consideremos una suceción minimizante $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tal que

$$||u - y_n|| \leq \rho + \frac{1}{n}$$

Luego, se tiene lo siguiente

$$1 = |1-0| = |l(u) - l(y_n)| \leq ||l|| \quad ||u-y_n|| \leq (\rho + \frac{1}{n})||l||$$

obteniéndose que

$$\frac{1}{\rho + \frac{1}{n}} \leq ||l||$$

luego tomando el límite se concluye lo pedido.

P5.- Sea E espacio de Banach y $E^\star$ su dual correspondiente. Definamos los siguiente ortogonales
Si $M \subseteq E$,

$$M^\perp = \{f \in E^\star :< f, x >= 0, \forall x \in M\}$$

Si $N \subseteq E^\star$,

$$N^\perp = \{x \in E :< f, x >= 0, \forall f \in N\}$$

Demuestre que $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$ y que $\bar{N} \subseteq (N^\perp)^\perp$.

Demostración:

Primero notemos que al tomar ortogonal de un conjunto, por continuidad de las funciones del dual y predual se estos son cerrados. Veamos la priera igualdad.

Sea $x \in M$. Por definición del ortogonal $\forall f \in E^\star, < f, x >= 0$. Ahora como $M^\perp \subseteq E^\star$, se tiene que

$$(M^\perp)^\perp = \{x \in E :< f, x >= 0, f \in M^\perp\}$$

esto implica que $x \in (M^\perp)^\perp$. Por tanto $M \subseteq (M^\perp)^\perp$, y tomando adherencia se tiene una de las inclusiones.

Ahora, supongamos por contradicción que la otra inclusión no se tiene. Luego $\exists x_0 \in (M^\perp)^\perp$ tal que $x_0 \notin \bar{M}$. Luego por Hanh-Banach, $\exists f \in E^\star$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < \alpha < f(x_0)$$

Ahora, $(M^{\perp})^{\perp}$ es un espacio vectorial, luego es posible tomar $x = \lambda x_1$ con $\lambda > 0$ para tener que $f|_{(M^{\perp})^{\perp}} = 0$, pero porla defınción del ortogonal $f \in M^{\perp}$, lo que hace que $< f, x_0 >= 0$ contradiciendo Hanh-Banach.

Por tanto se debe tener la otra inclusión.

Ahora, sea $f \in N$. Por definición se tiene que

$$(N^{\perp})^{\perp} = \{x \in R :< f, x >= 0, \forall f \in N^{\perp}\}$$

Luego se tiene que $f \in (N^{\perp})^{\perp}$, luego $N \subseteq (N^{\perp})^{\perp}$. Al tomar adherencia se obtiene lo pedido.

Vemos que el procedimiento para la otra inclusión sería análogo que el de $(M^{\perp})^{\perp} \subseteq \bar{M}$ si E fuese reflexivo.