

Fabián Sepúlveda

Ayudantía 1: Espacios de Banach y Teo. de Hanh-Banach

22 de Agosto de 2022

P1.- Sea (X, d) un espacio métrico y definimos

$$C_b(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}$$

Demostrar que $(C_b(X), \| \cdot \|_\infty)$ es espacio de Banach.**P2.-** Definamos $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea

$$K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} \times \mathcal{F}\text{-medible}$$

tal que

$$\int_{\Omega} |K(x, y)| d\mu(x) \leq c_1$$

$$\int_{\Omega} |K(x, y)| d\mu(y) \leq c_2$$

y definimos el siguiente operador

$$\kappa : (L^p(\Omega), \| \cdot \|_p) \rightarrow (L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$$

$$\kappa f(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y) d\mu(y)$$

Demostrar que κ es lipschitz, que $\kappa \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$ y que $\|\kappa\|_{\mathcal{L}(L^p, L^p)} \leq c_1^{1/q} c_2^{1/p}$, donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.**P3.-** Sea E espacio de Banach y E^* su dual. Demuestre que si E^* es separable, entonces E es separable.**P4.-** Sea Y subespacio vectorial propio cerrado de X espacio de Banach. Sea $u \in X \setminus Y$ tal que $\text{dist}(u, Y) = \rho$. Demuestre que existe $l \in X^*$ tal que $Y \subseteq \ker(l)$, $l(u) = 1$ y que $\|l\| = \rho^{-1}$.**P5.-** Sea E espacio de Banach y E^* su dual correspondiente. Definamos los siguientes ortogonales
Si $M \subseteq E$,

$$M^\perp = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle = 0, \forall x \in M\}$$

Si $N \subseteq E^*$,

$$N^\perp = \{x \in E : \langle f, x \rangle = 0, \forall f \in N\}$$

Demuestre que $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$ y que $\bar{N} \subseteq (N^\perp)^\perp$