AYUDANTÍA 1 - ANÁLISIS ABSTRACTO 1

JUAN CARLOS POZO – DAVID URRUTIA

1. Ejercicio 1

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ con $A \subseteq B$. Demuestre que $m^*(A) \leq m^*(B)$, siendo m^* la medida exterior de Lebesgue.

Antes de la Demostración:

Recordemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}$, la medida exterior de Lebesgue $m^*(A)$ se define como

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) \colon A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{siendo } I_n \text{ un intervalo abierto acotado} \right\}$$

donde $\ell(I)$ es el largo del intervalo I.

También, recordemos que si $C, D \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos acotados inferiormente, se tiene que si $C \subseteq D$, entonces, $\inf D \leq \inf C$.

Demostración. En efecto, consideremos un cubrimiento $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de B por intervalos abiertos, es decir, cada I_k es un intervalo abierto y

$$B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Entonces, la contención $A \subseteq B$ implica que

$$A \subseteq B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

lo que implica que

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

y por ende, $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento de A por intervalos abiertos. Luego, si definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} C &:= \left\{ \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ell(I_k) \colon \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ intervalos abiertos acotados y } B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\} \\ D &:= \left\{ \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ell(I_k) \colon \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ intervalos abiertos acotados y } A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\}, \end{aligned}$$

se tiene que $C \subseteq D$ y por ende

$$\begin{aligned}
m^*(A) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\ell(I_k)\colon \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ intervalos abiertos acotados y } A\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\}\\
&= \inf D\\
&= \inf C\\
&\leq \inf\left\{\textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}\ell(I_k)\colon \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ intervalos abiertos acotados y } B\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\}\\
&= m^*(B)
\end{aligned}$$

y por ende, $m^*(A)\leq m^*(B)$. □

Ejercicio 2

Demuestre que

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\ell(I_n)\colon A\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{siendo } I_n \text{ un intervalo cerrado y acotado}\right\}$$

Antes de la Demostración.

Recordemos que la medida se define por ínfimos de sumas numerable de largos de intervalos abiertos y acotados cuyos intervalos cubren A.

Ahora podemos hacer la analogía con los intervalos cerrados acotados.

La clave de la demostración se basará en el ejercicio anterior y nuevamente la propiedad de $\inf A\leq\inf B$ cuando A, B son conjuntos acotados inferiormente con $B\subseteq A$ jugará un rol importante en la demostración.

Demostración. Sea $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de A por intervalos cerrados y acotados, entonces, nótese que

$$A\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$

y por el ejercicio anterior, se verifica

$$\begin{aligned}
m^*(A) &\leq m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*\left(I_n\right)\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right)
\end{aligned}$$

entonces, el conjunto

$$\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}}\ell(I_k)\colon \text{cada } I_k \text{ es un intervalo cerrado acotado con } A\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\}$$

es acotado inferiormente por $m^*(A)$. Como el ínfimo es la cota intefior maximal, se tiene que

$$m^*(A) \leq \inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k) \colon \text{cada } I_k \text{ es un intervalo cerrado acotado con } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\}$$

Para demostrar la cota invertida, notemos que si $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de A por intervalos abiertos acotados, se tiene que $\{\overline{I_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de A por intervalos cerrados acotados. Entonces, el conjunto

$$\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) \colon A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{siendo } I_n \text{ un intervalo abierto acotado} \right\}$$

está contenido en

$$\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) \colon A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{siendo } I_n \text{ un intervalo cerrado acotado} \right\}.$$

de modo que los infimos de ambos conjuntos se invierten en monotonía, es decir,

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) \colon A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{siendo } I_n \text{ un intervalo cerrado acotado} \right\} \\ \leq \quad & \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) \colon A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{siendo } I_n \text{ un intervalo abierto acotado} \right\} \\ = \quad & m^*(A) \end{aligned}$$

implicando así que

$$\inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k) \colon \text{cada } I_k \text{ es un intervalo cerrado acotado con } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\} \leq m^*(A).$$

Luego, se tiene que

$$\inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k) \colon \text{cada } I_k \text{ es un intervalo cerrado acotado con } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\} = m^*(A)$$

lo que concluye la demostración. □

Ejercicio 3

Usando propiedades de medida exterior, demuestre que el intervalo $[0, 1]$ es no numerable.

Demostración. La demostración la haremos por contradicción. Si $[0, 1]$ fuese numerable, se tendría que $m^*([0, 1]) = 0$, sin embargo, se tiene que

$$m^*([0, 1]) = \ell([0, 1]) = 1 - 0 = 1,$$

lo cual es una contradicción. □

Problema 4

Un conjunto de los números reales G es un conjunto G_δ si es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos. Muestre que para cualquier conjunto acotado E existe un conjunto G el cual es G_δ que verifica

$$E \subseteq G \quad \text{y} \quad m^*(E) = m^*(G).$$

Antes de la Demostración

Recordemos que un conjunto $G \in G_\delta$ si existe $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos tales que O_n es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n.$$

y también recordemos que

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_k) \colon I_k \text{ es un intervalo abierto abierto y } A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\}$$

Por otro lado, recordemos que dado un conjunto acotado inferiormente $H \subseteq \mathbb{R}$, $L = \inf H$ si y sólo si L es cota inferior de H y dado $\varepsilon > 0$ existe $h \in H$ tal que $h < L + \varepsilon$.

Por último, recordemos que la union arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.

Demostración. Como

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_k) \colon I_k \text{ es un intervalo abierto abierto y } E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right\}$$

se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de intervalos abiertos $\{I_k(\varepsilon)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k(\varepsilon)$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k(\varepsilon)) < m^*(E) + \varepsilon$$

en particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una familia numerable de intervalos abiertos $\{I_k(n)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k(n)$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k(n)) < m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Sea $O_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k(n)$. Se tiene que O_n es un conjunto abierto, pues, cada $I_k(n)$ es un intervalo abierto y en particular, un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ y O_n es la unión de estos $I_k(n)$.

Por otro lado, se tiene que

$$m^*(O_n) = m^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k(n)\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(I_k(n)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ell(I_k(n)) \tag{1}$$

y ésto último se debe a que la medida exterior de un intervalo es su propio largo.

Por último, definamos $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Como O_n es abierto, se tiene que G es la intersección numerable de conjuntos abiertos, es decir, $G \in G_\delta$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \subseteq O_n$$

y por ende, $m^*(G) \leq m^*(O_n)$, además, por (1), se verifica

$$m^*(G) \leq m^*(O_n) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \ell(I_k(n)) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$$

Por otro lado, nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k(n) = O_n$, entonces, se tiene que si $x \in E$, se tiene que $x \in O_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por ende, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = G$, es decir, $E \subseteq G$. Luego, se tiene que $m^*(E) \subseteq m^*(G) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$, entonces, haciendo tender $n \to +\infty$, se tiene que $m^*(E) = m^*(G)$.

En conclusión, hemos probado que existe un conjunto $G \in G_\delta$ tal que $E \subseteq G$ y $m^*(G) = m^*(E)$ y hemos probado lo pedido. $\square$