Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantías de Ecuaciones Diferenciales

Primavera 2022

18 de octubre de 2022

Profesor: Gonzalo Robledo

Ayudantes: Claudio Carrasco *(Lunes, 8:30)*
David Urrutia *(Lunes, 10:15)*
Valentina Calderón *(Lunes, 16:15)*

Ayudantía 6

Ejercicio 1.1. Si $\mathcal{L}\{f(x)\}(p)$ verifica

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(p) = \frac{6p}{p^2+2p-8},$$

calcule $f(x)$.

Solución:
Se tiene que el denominador es $h(p)$, donde

$$h(p) = p^2 + 2p - 8.$$

Sean p_+ y p_- las raíces de h. Por la fórmula de las raíces cuadráticas, dichas raíces verifican

$$p_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = -1 \pm 3,$$

lo cual implica que $p_+ = 2$ y $p_- = -4$. Entonces, f tiene que ser alguna combinación lineal de funciones exponenciales. Procedamos a expresar la fracción

$$\frac{6p}{p^2+2p-8}$$

en fracciones parciales. Notemos que

$$\frac{6p}{p^2+2p-8} = \frac{6p}{(p-2)(p+4)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+4} = \frac{A(p+4)+B(p-2)}{(p-2)(p+4)} = \frac{(A+B)p + 2(2A-B)}{(p-2)(p+4)}$$

y por ende,

$$\begin{cases} A+B &= 6 \\ 2(2A-B) &= 0 \end{cases}$$

y por ende, $A = 2$ y $B = 4$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(x)\}(p) &= \frac{6p}{p^2+2p-8} \\
&= \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+4} \\
&= \frac{2}{p-2} + \frac{4}{p+4} \\
&= 2\mathcal{L}\{e^{2x}\}(p) + 4\mathcal{L}\{e^{-4x}\}(p) \\
&= \mathcal{L}\{2e^{2x} + 4e^{-4x}\}(p)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la linealidad de $\mathcal{L}$. Luego, se verifica

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(p) = \mathcal{L}\{2e^{2x} + 4e^{-4x}\}(p)$$

y por el Teorema de Lerch, se tiene que

$$f(x) = 2e^{2x} + 4e^{-4x}$$

que es lo que se pedía.

Ejercicio 1.2. Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

$$y'' + 2y' - 8y = 0 \quad \text{con } y'(0) = -12 \quad \text{e } y(0) = 6.$$

Solución:

Recordemos que si f es derivable y de orden exponencial, se verifica que

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(p) = -f(0) + p\mathcal{L}\{f(x)\}(p),$$

en particular,

$$\mathcal{L}\{y'(x)\}(p) = -y(0) + p\mathcal{L}\{y(x)\}(p)$$

y por ende,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''(x)\}(p) &= -y'(0) + p\mathcal{L}\{y'(x)\}(p) \\
&= -y'(0) + p\{-y(0) + p\mathcal{L}\{y(x)\}(p)\} \\
&= -y'(0) - py(0) + p^2\mathcal{L}\{y(x)\}(p),
\end{aligned}$$

entonces,

$$-6p + (p^2 + 2p - 8)\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \mathcal{L}\{y''(x) + 2y'(x) - 8y(x)\}(p) = 0$$

y ésto implica

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{6p}{p^2+2p-8}$$

y por el ejercicio anterior, tenemos que

$$y(x) = 2e^{2x} + 4e^{-4x}.$$

Ejercicio 1.3. Usando la transformada de Laplace, encuentre la solución al sistema,

$$\begin{aligned} x'' + y' &= e^t - x \\ y'' + x' &= 1 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $y'(0) = -1$, y donde la funciones incógnitas son $t \to x(t)$ y $t \to y(t)$.

<u>Solución</u>: La idea es reducir este sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones algebraico.
Aplicando transformada en ambas ecuaciones y utilizando la linealidad de esta, obtenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x'')(p) + \mathcal{L}(y')(p) &= \mathcal{L}(e^t)(p) - \mathcal{L}(x)(p) \\ \mathcal{L}(y'')(p) + \mathcal{L}(x')(p) &= \mathcal{L}(x'')(p) + \mathcal{L}(1)(p) \end{aligned}$$

De aquí, ocupamos la notación corta $\mathcal{L}(x)(p) = \hat{x}(p)$. Esto es equivalente a,

$$\begin{aligned} p^2\hat{x}(p) - px(0) - x'(0) + p\hat{y}(p) - y(0) &= \frac{1}{p-1} - \hat{x}(p) \\ p^2\hat{y}(p) - py(0) - y'(0) + p\hat{x}(p) - x(0) &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} p^2\hat{x}(p) - p + p\hat{y}(p) - 2 &= \frac{1}{p-1} - \hat{x}(p) \\ p^2\hat{y}(p) + p\hat{x}(p) &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} (p^2+1)\hat{x}(p) + p\hat{y}(p) &= \frac{1}{p-1} + p + 2 = \frac{p^2+p-1}{p-1} \\ p^2\hat{y}(p) + p\hat{x}(p) &= \frac{1}{p} \Longleftrightarrow \hat{y}(p) = \frac{1}{p^3} - \frac{\hat{x}(p)}{p} \end{aligned}$$

Reemplazando este última igualdad en la ecuación anterior,

$$(p^2+1)\hat{x}(p) + \frac{1}{p^2} - \hat{x}(p) = p^2\hat{x}(p) + \frac{1}{p^2} = \frac{p^2+p-1}{p-1}$$

Por tanto,

$$\hat{x}(p) = \frac{p^2+p-1}{p^2(p-1)} - \frac{1}{p^4} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^4} = \mathcal{L}(t)(p) + \mathcal{L}(e^t)(p) - \mathcal{L}(\frac{t^3}{6})(p).$$

Despejando $\hat{y}(p)$, se obtiene que,

$$\hat{y}(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p-1} = \mathcal{L}(1)(p) + \mathcal{L}(\frac{t^4}{24})(p) - \mathcal{L}(e^t)(p).$$

Por linealidad y por el teorema de Lerch, concluimos que,

$$x(t) = t + e^t - \frac{t^3}{6}$$
$$y(t) = 1 + \frac{t^4}{24} - e^t$$

Ejercicio 1.4. Considere el sistema diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y + \sin(t),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + \cos(t),$$

con la condición inicial $x(0) = 1, y(0) = -1, x'(0) = 0, y'(0) = -1$. Usando transformada de Laplace encuentre la solución del sistema.

Solución: Lo primero que hacemos es aplicar la transformada de Laplace. Esto es:

$$\begin{cases} s^2\hat{x} - sx(0) - x'(0) = \hat{y} + \mathcal{L}\{\sin(t)\} \\ s^2\hat{y} - sy(0) - y'(0) = -[s\hat{s}\hat{x} - x(0)] + \mathcal{L}\{\cos(t)\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2\hat{x} - s = \hat{y} + \frac{1}{s^2+1}\} \\ s^2\hat{y} - s + 1 = -s\hat{x} + 1 + \frac{s}{s^2+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2\hat{x} - \hat{y} = s + \frac{1}{s^2+1} \\ s^2\hat{y} + s\hat{x} = \frac{s}{s^2+1} - s, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2\hat{x} - \hat{y} = \frac{s^3+s+1}{s^2+1} \\ s\hat{x} + s^2\hat{y} = -\frac{s^3}{s^2+1}, \end{cases}$$

Esto se puede escribir en forma diferencial,

$$\begin{pmatrix} s^2 & -1 \\ s & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s^3+s+1}{s^2+1} \\ -\frac{s^3}{s^2+1}, \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+1} \\ -\frac{(s+1)}{s^2+1}. \end{pmatrix}$$

Así,

$$\hat{x} = \frac{s}{s^2+1}, \qquad \hat{y} = -\frac{(s+1)}{s^2+1}.$$

Aplicamos $\mathcal{L}^{-1}\{\}$,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(t),$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s+1}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = -\cos(t) - \sin(t).$$

Así,

$$x(t) = \cos(t), \qquad y(t) = -\cos(t) - \sin(t).$$