



Ayudantías de Ecuaciones Diferenciales

Primavera 2021

13 de octubre de 2022

Profesor: Gonzalo Robledo

Ayudantes: Claudio Carrasco (*Lunes, 8:30*)
David Urrutia (*Lunes, 10:15*)
Valentina Calderón (*Lunes, 16:15*)

Ayudantía 5

Ejercicio 1.1. Si

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{p+5}{p^2+2p+5},$$

encuentre $f(x)$.

Solución: Antes de resolver el ejercicio, siempre es bueno mirar el denominador p^2+2p+5 y notar que tiene raíces complejas. De acuerdo a la clase del último Jueves, esto sugiere completar cuadrados. Ahora, veamos que:

$$\frac{p+5}{p^2+2p+5} = \frac{p+1+4}{(p+1)^2+4} = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{4}{(p+1)^2+4}.$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{4}{(p+1)^2+4}.$$

Aplicamos la transformada inversa:

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{4}{(p+1)^2+4} \right\}.$$

Por la linealidad de la transformada inversa,

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+1}{(p+1)^2+4} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{(p+1)^2+4} \right\}.$$

Será útil en este caso la siguiente propiedad de la transformada inversa:

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(s),$$

entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).$$

Calculamos entonces la primera transformada inversa. En este caso tendremos que $a = 1$, y podemos escribir:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 4},$$

cuya transformada inversa es conocida y es $\cos(2t)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right\} &= e^{-1t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+4}\right\} \\ &= e^{-t}\cos(2t)\end{aligned}$$

Ahora calculamos la segunda. En este caso también usamos la propiedad y tomamos $a = 1$ al igual que el caso anterior. En este caso tendremos:

$$F(p) = \frac{4}{p^2 + 4},$$

que se puede escribir como:

$$F(p) = 2\frac{2}{p^2 + 2^2}.$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(p+1)^2+4}\right\} = 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2+2^2}\right\}. \quad (1)$$

Recordemos que:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Por lo que, aplicando transformada inversa,

$$\sin(at) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{p^2 + a^2}\right\}$$

En este caso tenemos $a = 2$ y $s = p$. Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2 + 2^2}\right\} = \sin(2t).$$

Reemplazando en (1),

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(p+1)^2+4}\right\} = 2e^{-t}\sin(2t)$$

Finalmente,

$$f(x) = e^{-t} \cos(2t) + 2e^{-t} \sin(2t) = e^{-t} [\cos(2t) + 2 \sin(2t)].$$

Ejercicio 1.2. Demuestre que si $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, de orden exponencial y $f(x + \omega) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-p\omega}} \int_0^\omega e^{-px} f(x) dx.$$

En la guía de ejercicios decía $e^{p\omega}$ en lugar de $e^{-p\omega}$. Lamentamos este involuntario error.

Solución Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(x)\} &= \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx \quad (\text{Por definición}) \\ &= \int_\omega^\infty e^{-ps} e^{p\omega} f(s - \omega) ds \quad (\text{Hacemos cambio de variable } x = s - \omega) \\ &= \int_\omega^\infty e^{-ps} e^{p\omega} f(s) ds \quad (\text{observe que } f(s) = f(s - \omega + \omega) = f(s - \omega)) \\ &= e^{p\omega} \left[\int_\omega^\infty e^{-ps} f(s) ds + \int_0^\omega e^{-ps} f(s) ds - \int_0^\omega e^{-ps} f(s) ds \right] \\ &= e^{p\omega} \mathcal{L}\{f(x)\} - e^{p\omega} \int_0^\omega e^{-ps} f(s) ds. \end{aligned}$$

Ahora notemos que se tiene la identidad

$$[1 - e^{p\omega}] \mathcal{L}\{f(x)\} = -e^{p\omega} \int_0^\omega e^{-ps} f(s) ds.$$

Multiplicamos por $e^{-p\omega}$ y se tiene

$$[e^{-p\omega} - 1] \mathcal{L}\{f(x)\} = - \int_0^\omega e^{-ps} f(s) ds.$$

y así se tiene

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = -\frac{1}{e^{-p\omega} - 1} \int_0^\omega e^{-ps} f(s) ds = \frac{1}{1 - e^{-p\omega}} \int_0^\omega e^{-ps} f(s) ds$$

y concluye la demostración.

Es muy interesante analizar este resultado con las transformadas de Laplace de funciones periódicas conocidas. Por ejemplo, sabemos que la función $f(x) = \sin(\beta x)$ tiene periodo $\frac{2\pi}{\beta}$. Por lo tanto, se tiene la identidad

$$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}}} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} e^{-px} \sin(\beta x) dx$$

o bien

$$[1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}}] \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} = \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} e^{-px} \sin(\beta x) dx$$

Ejercicio 1.3. Hallar la solución de $y'' + 2y + 5y = 3e^{-x} \sin x$, con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.

Solución: Denotaremos $\mathcal{L}\{f(x)\}(p) := \hat{f}(p)$.

Note que $|3e^{-x} \sin(x)| \leq 3e^{-x}$, por lo que $x \rightarrow 3e^{-x} \sin(x)$ es de orden exponencial. Por tanto, y, y', y'' también son de orden exponencial. Aplicando transformada a ambos lados, y utilizando la linealidad de $\mathcal{L}$ resulta en que,

$$p^2 \hat{y} - py(0) - y'(0) + 2(p\hat{y} - y(0)) + 5\hat{y} = \mathcal{L}\{3e^{-x} \sin x\}(p)$$

Utilizando los datos dado en las condiciones iniciales, lo anterior es equivalente a,

$$p^2 \hat{y} - 3 + 2p\hat{y} + 5\hat{y} = 3\mathcal{L}\{e^{-x} \sin x\}$$

Por un lado, recordemos de la propiedad de traslación de la exponencial en la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-x} \sin x\}(p) = \mathcal{L}\{\sin(x)\}(p - (-1)) = \frac{1}{(p + 1)^2 + 1}$$

Reescribiendo,

$$\begin{aligned} \hat{y}(p) &= \frac{3}{((p + 1)^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)} + \frac{3}{p^2 + 2p + 5} \\ &= \frac{3}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)} + \frac{3}{p^2 + 2p + 5} \\ &= \frac{3}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)} + \frac{3}{(p + 1)^2 + 4} \end{aligned}$$

Note que el segundo sumando es sencillo de invertir si tenemos en mente la propiedad de la traslación. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p + 1)^2 + 4} &= \frac{1}{(p + 1)^2 + 2^2} \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{-x} \sin(2x)\right\} \end{aligned}$$

Por otro lado, el primer sumando debe separarse por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 2p + 2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 5}$$

Multiplicando e igualando coeficientes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + 2A + D + 2C &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2B + 5A + 2C + 2D &= 0 \\ 5B + 2D &= 1 \end{aligned}$$

Da a lugar a las siguientes soluciones: $A = C = 0$ y $B = -D = \frac{1}{3}$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)} &= \frac{\frac{1}{3}}{p^2 + 2p + 2} - \frac{\frac{1}{3}}{p^2 + 2p + 5} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{(p+1)^2 + 1} - \frac{\frac{1}{6} \cdot 2}{(p+1)^2 + 4} \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}e^{-x}\sin(x)\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}e^{-x}\sin(2x)\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \mathcal{L}\{e^{-x}\sin(x)\} - \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{3}{2}e^{-x}\sin(2x)\right\} \\ &= \mathcal{L}\{e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x) + \frac{3}{2}e^{-x}\sin(2x)\} \\ &= \mathcal{L}\{e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\sin(2x)\} \end{aligned}$$

Por inyectividad,

$$y(x) = e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\sin(2x).$$

Ejercicio 1.4. Usando la transformada de Laplace, demuestre que el problema de Cauchy

$$y'' - a^2y = 0 \quad \text{con } y(0) = k_1 \text{ e } y'(0) = k_2,$$

tiene como solución

$$y(x) = k_1 \cosh(ax) + \frac{k_2}{a} \sinh(ax).$$

Demostración: En efecto, recordemos que la solución del problema de Cauchy

$$y'' + Ay' + By = 0$$

tiene por transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{(p + A)y(0) + y'(0)}{p^2 + Ap + B}.$$

Entonces, reemplazando $A = 0$, $B = -a^2$, $y(0) = k_1$ e $y'(0) = k_2$, se tiene que

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \frac{(p + A)y(0) + y'(0)}{p^2 + Ap + B} = \frac{pk_1 + k_2}{p^2 - a^2},$$

entonces, la última igualdad la podemos descomponer en fracciones parciales, es decir,

$$\frac{pk_1 + k_2}{p^2 - a^2} = \frac{C}{p - a} + \frac{D}{p + a} = \frac{p(C + D) + a(C - D)}{p^2 - a^2},$$

lo cual implica que

$$pk_1 + k_2 = p(C + D) + a(C - D)$$

entonces, se obtienen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C + D &= k_1 \\ C - D &= \frac{k_2}{a} \end{cases}$$

de modo que

$$C = \frac{1}{2} \left\{ k_1 + \frac{k_2}{a} \right\} \quad y \quad D = C - \frac{k_2}{a} = \frac{1}{2} \left\{ k_1 - \frac{k_2}{a} \right\},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(x)\}(p) &= \frac{pk_1 + k_2}{p^2 - a^2} \\ &= \frac{p(C + D) + a(C - D)}{p^2 - a^2} \\ &= \frac{C}{p - a} + \frac{D}{p + a} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ k_1 + \frac{k_2}{a} \right\} \frac{1}{p - a} + \frac{1}{2} \left\{ k_1 - \frac{k_2}{a} \right\} \frac{1}{p + a} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ k_1 + \frac{k_2}{a} \right\} \mathcal{L}\{e^{ax}\}(p) + \frac{1}{2} \left\{ k_1 - \frac{k_2}{a} \right\} \mathcal{L}\{e^{-ax}\}(p) \\ &= \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ k_1 + \frac{k_2}{a} \right\} e^{ax} + \frac{1}{2} \left\{ k_1 - \frac{k_2}{a} \right\} e^{-ax} \right\} (p) \\ &= \mathcal{L} \left\{ k_1 \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} + \frac{k_2}{a} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right\} (p) \\ &= \mathcal{L} \left\{ k_1 \cosh ax + \frac{k_2}{a} \sinh ax \right\} (p), \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(p) = \mathcal{L} \left\{ k_1 \cosh ax + \frac{k_2}{a} \sinh ax \right\} (p)$$

y por el Teorema de Lerch, se tiene que

$$y(x) = k_1 \cosh ax + \frac{k_2}{a} \sinh ax$$

lo cual prueba lo pedido. □

Ejercicio 1.5. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{\cosh(ax) \cos(ax)\} = \frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$$

Nota: En la guía hay un error de tipeo, dice que se tiene que demostrar que

$$\mathcal{L}\{\cosh(ax) \cos(ax)\} = \frac{p}{p^4 + 4a^4}$$

lo cual lamentamos:

Demostración

Primero, recordemos que

$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2},$$

entonces,

$$\cosh(ax) \cos(ax) = \frac{e^{ax} \cos ax}{2} + \frac{e^{-ax} \cos ax}{2},$$

entonces, por la linealidad de la Transformada de Laplace, se tiene que

$$\mathcal{L}\{\cosh(ax) \cos(ax)\}(p) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^{ax} \cos ax\}(p) + \mathcal{L}\{e^{-ax} \cos ax\}(p))$$

y por el primer Teorema de Traslación, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh(ax) \cos(ax)\}(p) &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^{ax} \cos ax\}(p) + \mathcal{L}\{e^{-ax} \cos ax\}(p)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{\cos ax\}(p-a) + \mathcal{L}\{\cos ax\}(p+a)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p-a}{a^2 + (p-a)^2} + \frac{p+a}{a^2 + (p+a)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(p-a)(a^2 + (p+a)^2) + (p+a)(a^2 + (p-a)^2)}{(a^2 + (p-a)^2)(a^2 + (p+a)^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p^3 + 2p^2a + 2p^2a - ap^2 + 2pa + 2pa^2 + p^3 - 2p^2a + 2a^2p + ap^2 - 2ap^2 + 2a^3}{p^4 + 2ap^3 + 2a^2p^2 - 2ap^3 - 4a^2p^2 - 4a^3p + 2a^2p^2 + 4a^3p + 4a^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2p^3}{p^4 + 4a^4} \right) \\ &= \frac{p^3}{p^4 + 4a^4}. \end{aligned}$$

En resumen:

$$\mathcal{L}\{\cosh(ax) \cos(ax)\}(p) = \frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$$

lo cual demuestra lo que se quería. □