

## AYUDANTÍA 3 - ECUACIONES DIFERENCIALES

VALENTINA CALDERÓN – CLAUDIO CARRASCO – DAVID URRUTIA

### 1. PREGUNTA 1

Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + Q(x)y' + P(x)y = 0,$$

donde  $P$  y  $Q$  son funciones continuas en  $[a, b]$  y  $x \mapsto y^*(x)$  es una solución tal que  $y^*(x_0) = 0$  e  $\frac{d}{dx}y^*(x_0) = 0$  en algún  $x_0 \in (a, b)$ . Demuestre que  $y^*(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ .

*Respuesta:* Por el Teorema de existencia de unicidad, sabemos que si  $x_0 \in [a, b]$ , entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= 0 \\ y(x_0) = \frac{d}{dx}y(x_0) &= 0 \end{cases}$$

tiene una única solución  $x \mapsto y^*(x)$ .

Por otro lado, consideremos la función idénticamente nula en  $[a, b]$  denotada por  $y^*(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ .

Como la función idénticamente nula es constante, se tiene que  $y'(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$  (en los casos  $x = a$  y  $x = b$  se consideran las derivadas laterales).

De igual forma, se puede deducir que  $y''(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Es decir, la función idénticamente nula en  $[a, b]$ .

Notemos entonces que la función idénticamente nula  $y(x) \equiv 0$  verifica

$$0 + P(x) \cdot 0 + Q(x) \cdot 0 = 0$$

y vale 0 en  $x_0$ , es decir, también es solución del problema de Cauchy, pero por unicidad se tiene que  $y^*(x) = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ .

### 2. PREGUNTA 2

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(1) \quad y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}.$$

*Respuesta:* Recordemos que toda solución  $x \mapsto y(x)$  de la ecuación (1) viene dada por

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

donde  $x \mapsto y_g(x)$  es solución del sistema

$$(2) \quad y'' + y = 0$$

y  $x \mapsto y_p(x)$  es una solución particular de (1), la cual viene dada por

$$y_p(x) = y_1(x) \int \frac{-y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t) \cos(t)} dt + y_2(x) \int \frac{y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t) \cos(t)} dt$$

siendo  $y_1$  e  $y_2$  soluciones Linealmente Independientes de la ecuación (2) y  $W(y_1, y_2)(x)$  el Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$ , es decir,

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Partamos analizando la ecuación (2): Si suponemos que la solución es  $x \mapsto e^{\lambda x}$ , se tiene que

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = \{e^{\lambda x}\}''$$

de modo que

$$\{e^{\lambda x}\}'' + e^{\lambda x} = (\lambda^2 + 1)e^{\lambda x} = 0$$

y dado que  $e^{\lambda x} \neq 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

cuyas soluciones de la ecuación polinomial precedente viene dada por  $\lambda_{\pm} = \pm i$ , entonces, las raíces son complejas, es decir,  $y_1$  e  $y_2$  pueden ser de la forma

$$y_1(x) = e^{ax} \cos(bx) \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{ax} \sin(bx)$$

donde  $\lambda = a + ib$  es raíz de  $\lambda^2 + 1$ , es decir,

$$y_1(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sin(x),$$

entonces,

$$y_1'(x) = -\sin(x) \quad \text{e} \quad y_2'(x) = \cos(x),$$

de modo que

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

entonces,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x) \int \frac{-y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t) \cos(t)} dt + y_2(x) \int \frac{y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t) \cos(t)} dt \\ &= \cos(x) \int \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} dt + \sin(x) \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)} dt \\ &= \cos(x) \ln(\cos(x)) + \sin(x) \int dt \\ &= \cos(x) \ln(\cos(x)) + \sin(x)x + C \end{aligned}$$

con  $C \in \mathbb{R}$ , lo cual implica que

$$y_p(x) = \cos(x) \ln(\cos(x)) + \sin(x)x + C,$$

entonces,

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \cos(x) \ln(\cos(x)) + \sin(x)x + C \\ &= \cos(x)\{c_1 + \ln(\cos(x))\} + \sin(x)\{c_2 + x\} + C \end{aligned}$$

y con ello, se obtiene lo pedido.

## 3. PREGUNTA 3

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Encuentre la solución al problema de Cauchy,

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0.$$

con  $x > 0$ .

**Solución:** Vemos que es una ecuación homogénea con coeficientes no constantes. Para obtener la solución general, basta con encontrar dos soluciones linealmente independientes. Mediante un proceso de tanteo, podemos buscar una solución particular  $y_1$  a la ecuación. Por teorema visto en clases, sabemos que  $y_2(x) = v(x)y_1(x)$  es una solución particular, linealmente independiente a  $y_1(x)$ , donde

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

Para calcular  $P(x)$ , tenemos que escribir la ecuación en su forma general, esto es,

$$y'' - \frac{x+n}{x}y' + \frac{n}{x}y = 0$$

Así,  $P(x) = -\frac{x+n}{x}$ .

Para encontrar una solución particular, vemos que nos gustaría tener una función que satisfaga las igualdades  $y = y' = y''$ , pues de este modo, se tendrá que,

$$xy'' - (x+n)y' + ny = xy - (x+n)y + ny = 0$$

Podemos escoger, por ejemplo,  $y_1(x) = e^x$ , la cual es claramente una solución particular (independiente del valor de  $n$ ). Con esto, podemos calcular el valor de  $v(x)$  para determinar una segunda solución, l.i con  $y_1$ :

$$\begin{aligned} v(x) &= \int \frac{e^{\int \frac{x+n}{x} dx}}{e^{2x}} dx \\ &= \int \frac{e^{x+n \ln x}}{e^{2x}} dx \\ &= \int e^{-x+\ln x^n} dx \\ &= \int e^{-x} x^n dx \\ &:= I_n \end{aligned}$$

Usando integración por partes, vemos que,

$$\int e^{-x} x^n dx = -e^{-x} x^n + n \int e^{-x} x^{n-1} dx$$

Es decir, la integral satisface la siguiente relación recursiva:

$$I_n = -e^{-x} x^n + nI_{n-1}$$

para  $n \geq 1$  y  $I_0 := \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

Iterando sobre  $I_{n-1}$  esta relación, y luego sobre  $I_{n-2}$ , y así, hasta llegar a  $I_0$ , obtenemos que

$$I_n = -\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} x^i e^{-x} + C$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación homogénea es

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} x^i$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

#### 4. PREGUNTA 4

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(3) \quad y'' + 6y' + 9y = (x+1)e^x.$$

*Respuesta:* Recordemos que toda solución  $x \mapsto y(x)$  de la ecuación (1) viene dada por

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

donde  $x \mapsto y_g(x)$  es solución del sistema

$$(4) \quad y'' + 6y' + 9y = 0$$

y  $x \mapsto y_p(x)$  es una solución particular de (3), la cual viene dada por

$$y_p(x) = y_1(x) \int \frac{-y_2(x)(x+1)e^x}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)(x+1)e^x}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

siendo  $y_1$  e  $y_2$  soluciones Linealmente Independientes de la ecuación (2) y  $W(y_1, y_2)(x)$  el Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$ , es decir,

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Partamos analizando la ecuación (2): Si suponemos que la solución es  $x \mapsto e^{\lambda x}$ , se tiene que

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = \{e^{\lambda x}\}'' \quad \text{y} \quad \lambda e^{\lambda x} = \{e^{\lambda x}\}'$$

de modo que

$$\{e^{\lambda x}\}'' + 6\{e^{\lambda x}\}' + 9e^{\lambda x} = (\lambda^2 + 6\lambda + 9)e^{\lambda x} = 0$$

y dado que  $e^{\lambda x} \neq 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0,$$

cuya solución de la ecuación polinomial precedente viene dada por  $\lambda_{\pm} = -3$  de multiplicidad 2, entonces, decir,  $y_1$  e  $y_2$  pueden ser de la forma

$$y_1(x) = e^{ax} \quad \text{y} \quad y_2(x) = xe^{ax}$$

donde  $\lambda = a$  es la raíz de  $\lambda^2 + 6\lambda + 9$ , es decir,

$$y_1(x) = e^{-3x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{-3x},$$

entonces,

$$y_1'(x) = -3e^{-3x} \quad \text{e} \quad y_2'(x) = (1 - 3x)e^{-3x},$$

de modo que

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = (1 - 3x)e^{-6x} + 3xe^{-6x} = e^{-6x}$$

entonces,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-3x} \int \frac{-xe^{-3x}(x+1)e^x}{e^{-6x}} dx + xe^{-3x} \int \frac{e^{-3x}(x+1)e^x}{e^{-6x}} dx \\ &= e^{-3x} \underbrace{\int e^{4x}(x^2+x) dx}_{(I)} + xe^{-3x} \underbrace{\int (x+1)e^{4x} dx}_{(II)} \end{aligned}$$

Para (I), se tiene que

$$\int e^{4x}(x^2+x) dx = \int x^2 e^{4x} dx + \int x e^{4x} dx$$

y para (II), se tiene

$$\int e^{4x}(x+1) dx = \int x e^{4x} dx + \int e^{4x} dx.$$

Resolvamos (I), notemos que

y ambas integrales se pueden resolver por medio de integrales por partes. El primer sumando del lado derecho puede ser visto de la forma  $\int U dV$  donde  $U = x^2$  y  $dV = e^{4x} dx$ , es decir,

$$dU = 2x dx \quad \text{y} \quad V = \frac{e^{4x}}{4},$$

entonces,

$$\int U dV = UV - \int V dU = \frac{x^2 e^{4x}}{4} - \frac{1}{2} \int x e^{4x} dx.$$

y nótese que el segundo sumando de la igualdad precedente es idéntica al primer sumando de (II) multiplicada por  $\frac{-1}{4}$ . Entonces, veamos, nuevamente que podemos integrar dicho sumando por partes, es decir,

$$\int x e^{4x} dx = \int U dV$$

donde  $U = x$  y  $dV = e^{4x}$ . Entonces,  $dU = dx$  y  $V = \frac{e^{4x}}{4}$ , por ende,

$$\int x e^{4x} dx = UV - \int V dU = \frac{x e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4} dx = \frac{x e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16},$$

entonces,

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= e^{-3x} \int -e^{4x}(x^2 + x) dx + xe^{-3x} \int (x+1)e^{4x} \\
&= -e^{-3x} \left\{ \int x^2 e^{4x} dx + \int x e^{4x} dx \right\} + xe^{-3x} \left\{ \int x e^{4x} dx + \int e^{4x} dx \right\} \\
&= -e^{-3x} \left\{ \int x^2 e^{4x} dx + \int x e^{4x} dx \right\} + xe^{-3x} \left\{ \int x e^{4x} dx + \int e^{4x} dx \right\} \\
&= -e^{-3x} \left\{ \frac{x^2 e^{4x}}{4} - \frac{1}{2} \int x e^{4x} dx + \int x e^{4x} dx \right\} \\
&\quad + xe^{-3x} \left\{ \int x e^{4x} dx + \int e^{4x} dx \right\} \\
&= -e^{-3x} \left\{ \frac{x^2 e^{4x}}{4} + \frac{1}{2} \left[ \frac{x e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} \right] \right\} + xe^{-3x} \left\{ \frac{x e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + \frac{e^{4x}}{4} \right\} \\
&= -e^{-3x} e^{4x} \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{4} - \frac{1}{16} \right] \right\} + xe^{-3x} e^{4x} \left\{ \frac{x}{4} + \frac{3}{16} \right\} \\
&= e^x \left\{ -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{4} - \frac{1}{16} \right] + \frac{x}{4} + \frac{3}{16} \right\} \\
&= \frac{e^x}{32} \{-8x^2 - 2x + 2 + 8x + 6\} \\
&= \frac{e^x}{32} \{-8x^2 + 6x + 8\} + C
\end{aligned}$$

con  $C \in \mathbb{R}$ , lo cual implica que

$$y_p(x) = \frac{e^x}{32} \{-8x^2 + 6x + 8\} + C$$

entonces,

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{e^x}{32} \{-8x^2 + 6x + 8\} + C.$$

y con ello, se obtiene lo pedido.

## PROBLEMA 5

En la figura 1 vemos un esquema de una boya cilíndrica, que supondremos homogénea, flotando en agua, de manera que solamente un tercio de ella asoma por sobre la superficie del líquido.

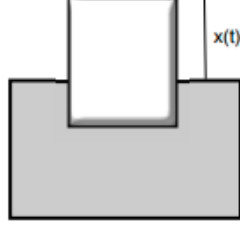


FIGURE 1. Esquema de la boya.

La altura del artefacto es de 2 metros. Supongamos que se presiona la boya hasta que su cara superior queda exactamente al nivel del líquido y luego se la suelta. Nos proponemos averiguar cómo varía la altura de la porción de boya que sobresale encima del agua en función del tiempo. La ecuación que modela el sistema es:

$$x'' + g \left( \frac{3}{2h}x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

*Respuesta:* La ecuación que debemos resolver es de segundo orden y es no homogénea. Una forma de resolverla es introducir el cambio de variable  $z(t) = \frac{3}{2h}x(t) - \frac{1}{2}$  obtenemos la siguiente EDO homogénea,

$$\frac{2h}{3}z'' + gz = 0,$$

donde  $h$  es la altura de la boya, y  $g$  es la aceleración de gravedad. Sabemos que la solución general de este tipo de ecuaciones es de la forma:

$$z(t) = C_1 \cos \left( \sqrt{\frac{3g}{2h}}t \right) + C_2 \sin \left( \sqrt{\frac{3g}{2h}}t \right).$$

Volviendo a la variable inicial  $x(t)$ ,

$$x(t) = \frac{2h}{3}C_1 \cos \left( \sqrt{\frac{3g}{2h}}t \right) + \frac{2h}{3}C_2 \sin \left( \sqrt{\frac{3g}{2h}}t \right) + \frac{h}{3}$$

Como la boya parte desde el reposo y en la posición cero, tenemos que  $x(0) = 0$ , y  $x'(0) = 0$ . Por esto, podemos encontrar las constantes:

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = 0.$$

Así,

$$x(t) = -\frac{h}{3} \cos \left( \sqrt{\frac{3g}{2h}}t \right) + \frac{h}{3}.$$

Como la boya es de 2 metros de altura, tendremos que:

$$x(t) = -\frac{2}{3} \cos \left( \sqrt{\frac{3g}{4}}t \right) + \frac{2}{3}.$$

Esto lo podemos graficar para ver cómo varía la posición de la boya con el tiempo:

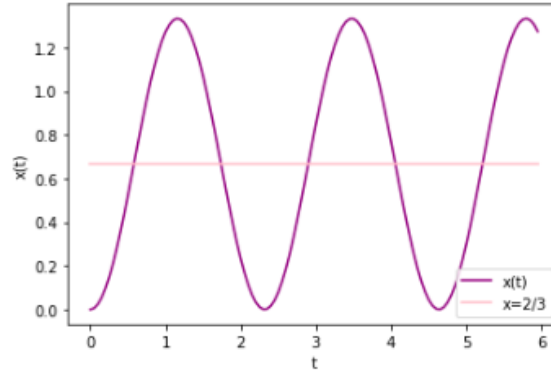


FIGURE 2. Gráfica de  $x(t)$ .

Cuando la boya está en equilibrio, la parte que asoma por sobre la superficie del líquido mide  $2/3$ . En la figura 2 podemos ver las gráficas de la función  $x$  y, en línea rosada, de la función constante  $2/3$ . Observemos que la oscilación de los valores de  $x$  se produce alrededor de este último valor.