AYUDANTÍA 2 - ECUACIONES DIFERENCIALES

VALENTINA CALDERÓN – CLAUDIO CARRASCO – DAVID URRUTIA

Ejercicio 1

Resuelva

$$\frac{y'}{y - y^{e^\pi}} = -\frac{e^x}{1 - e^\pi}.$$

Solución. Reescribiendo,

$$y' + \frac{e^x}{1-e^\pi} y = \frac{e^x}{1-e^\pi} y^{e^\pi}$$

la cual tiene la forma de una ecuación del tipo $y' + a(x)y = b(x)y^p$, es decir, es del tipo Bernoulli.
Luego sabemos que mediante el cambio de variable $u = y^{1-e^\pi}$, la ecuación se reduce a una lineal.
En efecto,

$$\begin{aligned} u' &= (1-e^\pi)y^{-e^\pi} y' \\ &= y^{-e^\pi}(-e^x y + e^x y^{e^\pi}) \\ &= -e^x y^{1-e^\pi} + e^x \\ &= -e^x u + e^x \end{aligned}$$

La ecuación anterior, es del tipo lineal, ya que tiene la forma de $u' + a(x)u = b(x)$. En nuestro caso, $a(x) = e^x = b(x)$. Vimos la semana pasada que la solución general a este tipo de ecuaciones es

$$u(x)e^{\int a(x)dx} = \int e^{\int a(s)ds} b(x)dx$$

Calculamos $\int a(x)$:

$$\int a(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

con $C_1 \in \mathbb{R}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int e^{\int a(s)ds} b(x)dx = \int e^{e^x} e^x dx &= \int e^{e^x} e^x dx \\ &= e^{e^x} + C \end{aligned}$$

donde C es una constante arbitraria. Luego la solución u la podemos escribir en función de x como:

$$u(x) = e^{-e^x}(e^{e^x}) + e^{-e^x}C = 1 + e^{-e^x}C.$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \sqrt[1-e^\pi]{1 + e^{-e^x}C}$$

□

Ejercicio 2

El modelo SIS, es un modelo epidemiológico de propagación de una enfermedad infecciosa (propuesto en 1927), el cual es descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} S' = -\beta SI + \gamma I \\ I' = \beta SI - \gamma I \end{cases}$$

con la condición inicial

$$S(0) \in (0,1) \quad \text{e} \quad I(0) \in (0,1)$$

tales que $S(0) + I(0) = 1$.

En el sistema, $S \in (0,1)$ es la fracción de *población susceptible*, mientras que $I \in (0,1)$ es la fracción de *población infectada*. El parámetro $\beta > 0$ describe la intensidad del contacto, mientras que $\gamma > 0$ mide la velocidad de recuperación.

(1) Demuestre que $S + I = 1$.
(2) Usando lo anterior demuestre que la ecuación diferencial que describe la evolución de intefectados viene dada por

$$I' = (\beta - \gamma)I - \beta I^2.$$

(3) Resuelva esta ecuación.
(4) Analice $\lim_{t\to\infty} I(t)$, considerando los casos $\beta < \gamma$ y $\beta > \gamma$.

Respuesta: En Primer lugar, consideremos la función auxiliar $F(t) = S(t) + I(t)$, la cual es la suma de susceptibles e infectados. Notemos que

$$F'(t) = S'(t) + I'(t) = 0,$$

es decir F es una función constante y por lo tanto $F(t) = F(0)$ para todo t. Por otro lado, las condiciones iniciales nos dicen que

$$F(t) = F(0) = S(0) + I(0) = 1$$

para todo t y eso demuestra la parte (1).

Ahora como, $S + I = 1$, se tiene que $S = 1 - I$, si reemplazamos en la segunda ecuación del sistema, se tendrá

$$\begin{aligned} I' &= \beta(1-I)I - \gamma I \\ I' &= \beta I - \beta I^2 - \gamma I \\ I' &= (\beta - \gamma)I - \beta I^2 \end{aligned}$$

y resolvemos la parte (2).

Para la parte 3, vemos que la ecuación es del tipo Bernoulli. Mediante el cambio de variables $u = I^{-1}$, la ecuación se puede reducir a una lineal. Diferenciando respecto a x se tendrá que,

$$u' = -I^{-2}I' = -(\beta - \gamma)I^{-1} - \beta = -(\beta - \gamma)u + \beta$$

El factor integrante asociado a esta ecuación lineal es,

$$A(t) = \int a(t)dt = \int (\beta - \gamma)dt = (\beta - \gamma)t$$

Por lo tanto, la solución viene dada por,

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t(\beta-\gamma)} \int e^{(\beta-\gamma)t}\beta dt \\ &= \beta e^{-t(\beta-\gamma)} \left(\frac{e^{(\beta-\gamma)t}}{(\beta-\gamma)} + C \right) \\ &= \frac{\beta}{\beta-\gamma} + C\beta e^{-t(\beta-\gamma)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{\beta-\gamma} + C\beta e^{-t(\beta-\gamma)}}$$

Por último, si $\beta > \gamma$, entonces $-t(\beta-\gamma) < 0$, para todo $t > 0$. Luego,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t(\beta-\gamma)} = 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{\beta-\gamma}{\beta} = 1 - \frac{\gamma}{\beta},$$

el cual se conoce como *equilibrio endémico.*

Por otro lado, si $\beta < \gamma$, tendremos que $-t(\beta-\gamma) > 0$, para todo $t > 0$. Luego,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t(\beta-\gamma)} = \infty$$

Por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0,$$

y este caso (donde el parámetro de recuperación es mayor que el parámetro asociado al contacto), se conoce como *equilibrio libre de infección.*

Ejercicio 3

Resuelva la ecuación diferencial

$$ydx + (x+y)dy = 0 \tag{1}$$

Solución. Definamos las funciones $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$P(x,y) = y \quad \text{y} \quad Q(x,y) = x + y.$$

Nótese que

$$0 = ydx + (x+y)dy = P(x,y) + Q(x,y)dy,$$

entonces, veamos las derivadas parciales de P y Q. En primer lugar,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y} = 1.$$

Entonces, la ecuación (1) es exacta, de modo que existe una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$ydx + (x+y)dy = dU.$$

Entonces, se tiene que

$$y = P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

entonces,

$$U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \int P(x,y)\,dx = \int y\,dx = xy + c_1(y)$$

con $y \mapsto c_1(y)$ una función constante en x que depende de y.

Por otro lado, se tiene que

$$x + y = Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

entonces,

$$U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = \int Q(x,y)\,dy = \int (x+y)\,dy = xy + \frac{y^2}{2} + c_2(x)$$

con $x \mapsto c_2(x)$ una función constante en y que depende de x.

Entonces, nótese que

$$y = P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \frac{y^2}{2} + c_2(x)\right) = y + \frac{\partial c_2(x)}{\partial x}.$$

Entonces, se tiene que

$$\frac{\partial c_2(x)}{\partial x} = 0$$

y por ende, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c_2(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De modo que

$$U(x,y) = xy + \frac{y^2}{2} + c.$$

Luego, la solución $x \mapsto y(x)$ del sistema (1) verifica la ecuación

$$K = U(x,y) = xy(x) + \frac{y^2(x)}{2} + c$$

con $K \in \mathbb{R}$ de modo que, al definir $C := c - K$, se tiene que

$$0 = y^2(x) + 2xy(x) + 2C,$$

entonces, $x \mapsto y(x)$ viene dada por (usando la fórmula de la solución de la ecuación cuadrática).

$$y_+(x) := -x + \sqrt{x^2 - 2C} \quad \text{e} \quad y_-(x) := -x - \sqrt{x^2 - 2C}$$

□

Ejercicio 4

Resuelva la ecuación

$$(r\cos^2(\theta) - \sin(\theta))\,dr - r\cos(\theta)(r\sin(\theta)+1)\,d\theta = 0. \tag{2}$$

Solución. Definamos $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$P(\theta, r) := -r\cos(\theta)(r\sin(\theta)+1) \quad \text{y} \quad Q(\theta,r) := r\cos^2(\theta) - \sin(\theta).$$

Notemos que la ecuación (2) es de la forma

$$0 = (r\cos^2(\theta) - \sin(\theta))\,dr - r\cos(\theta)(r\sin(\theta)+1)\,d\theta = P(\theta,r)\,d\theta + Q(\theta,r)\,dr$$

Entonces, al calcular las derivadas parciales de P con respecto a r se puede observar que

$$\frac{\partial P(\theta,r)}{\partial\, r} = \frac{\partial}{\partial\, r}\left(-r\cos(\theta)(r\sin(\theta)+1)\right) = -2r\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta).$$

mientras que la derivada parcial de Q con respecto a θ es dada de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\theta,r)}{\partial\theta} &= -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cos(\theta)(r\sin(\theta)+1)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos^2(\theta) - \sin(\theta)) \\
&= -2r\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)
\end{aligned}$$

de modo que $\frac{\partial P(\theta,r)}{\partial r} = \frac{\partial Q(\theta,r)}{\partial\theta}$ y por tanto, la ecuación (2) es exacta. Ésto implica la existencia de una función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial U(\theta,r)}{\partial\theta} = P(\theta,r) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U(\theta,r)}{\partial r} = Q(\theta,r).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
U(r,\theta) &= \int \frac{\partial U(\theta,r)}{\partial\, r}\, dr \\
&= \int Q(\theta,r)\, dr \\
&= \int r\cos^2(\theta) - \sin(\theta)\, dr \\
&= \frac{r^2}{2}\cos^2(\theta) - r\sin(\theta) + c_1(\theta).
\end{aligned}$$

donde $\theta \mapsto c_1(\theta)$ es una función constante de r, la cual, depende de θ.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
U(r,\theta) &= \int \frac{\partial U(r,\theta)}{\partial\,\theta}\, d\theta \\
&= \int Q(r,\theta)\, d\theta \\
&= \int -r\cos(\theta)(\sin(\theta)+1)\, dr \\
&= -r\int \cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\, dr \\
&= -r\int \frac{\sin(2\theta)}{2} + \cos(\theta)\, dr \\
&= -r\left(-\frac{\cos(2\theta)}{4} + \sin(\theta)\right) + c_2(r)
\end{aligned}$$

donde $r \mapsto c_2(r)$ es una función constante con respecto a θ, la cual, depende de r. Entonces, nótese que

$$\begin{aligned} -\left(r^2\frac{\sin(2\theta)}{2}+r\cos(\theta)\right) &= -r\cos(\theta)(r\sin(\theta)+1) \\ &= P(\theta,r) \\ &= \frac{\partial U(\theta,r)}{\partial\theta} \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r^2}{2}\cos^2(\theta)-r\sin(\theta)+c_1(\theta)\right) \\ &= -r^2\cos(\theta)\sin(\theta)-r\cos(\theta)+c_1'(\theta) \\ &= -r^2\frac{\sin(2\theta)}{2}-r\cos(\theta)+c_1'(\theta). \end{aligned}$$

entonces,

$$c_1'(\theta)=0$$

lo cual implica que $c_1(\theta)=k$ con $k\in\mathbb{R}$ y por ende

$$U(r,\theta)=\frac{r^2}{2}\cos^2(\theta)-r\sin(\theta)+k.$$

Y por ende, la solución $\theta\mapsto r(\theta)$ viene dada por la ecuación

$$K=U(\theta,r(\theta)),$$

es decir,

$$K=\frac{r^2(\theta)}{2}\cos^2(\theta)-r(\theta)\sin(\theta)+k,$$

luego, al definir $C:=2(k-K)$, se tiene que

$$0=r^2(\theta)\cos^2(\theta)-2r(\theta)\sin(\theta)+C,$$

entonces, las soluciones posibles vienen dadas por

$$r_-(\theta):=\frac{\sin(\theta)-\sqrt{\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)C}}{\cos^2(\theta)} \quad \text{y} \quad r_+(\theta):=\frac{\sin(\theta)+\sqrt{\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)C}}{\cos^2(\theta)}$$

$\square$

EJERCICIO 5

Demuestre que toda ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+k_1}{cx+dy+k_2}$$

donde a,b,c,d,k_1 y k_2 (presentes en la ecuación de la derecha) son constantes tales que $ad-bc\neq 0$, puede reducirse a una ecuacion homogénea de grado cero mediante los cambios de variable

$$x=\mu+\alpha \quad \text{e} \quad y=\nu+\beta$$

donde α y β son constantes[1].
Respuesta: Notemos que la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$(ax + by + k_1)dx - (cx + dy + k_2)dy = 0$$

Con los cambios de variable propuestos se tiene que $dx = d\mu$ e $dy = d\nu$, por lo tanto, la ecuación se podrá reescribir como

$$\begin{aligned}
(ax + by + k_1)d\mu - (cx + dy + k_2)d\nu &= 0 \\
(a[\mu + \alpha] + b[\nu + \beta] + k_1)d\mu - (c[\mu + \alpha] + d[\nu + \beta] + k_2)d\nu &= 0 \\
(a\mu + a\alpha + b\nu + b\beta + k_1)d\mu - (c\mu + c\alpha + d\nu + d\beta + k_2)d\nu &= 0 \\
(a\mu + b\nu + a\alpha + b\beta + k_1)d\mu - (c\mu + d\nu + c\alpha + d\beta + k_2)d\nu &= 0
\end{aligned}$$

La idea será elegir las constantes α y β tales que sean soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta = -k_1 \\ c\alpha + d\beta = -k_2, \end{cases}$$

el cual se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 \\ -k_2 \end{pmatrix}.$$

Como $ab - cd \neq 0$, se tiene que el sistema de ecuaciones tiene una solución única (α^*, β^*) tales que

$$\begin{cases} a\alpha^* + b\beta^* = -k_1 \\ c\alpha^* + d\beta^* = -k_2, \end{cases}$$

por lo tanto, considerando esas constantes, el cambio de variables $x = \mu + \alpha^*$ e $y = \nu + \beta^*$ nos dará la ecuación

$$\begin{aligned}
(a\mu + b\nu + \underbrace{a\alpha^* + b\beta^* + k_1}_{=0})d\mu - (c\mu + d\nu + \underbrace{c\alpha^* + d\beta^* + k_2}_{=0})d\nu &= 0 \\
(a\mu + b\nu)d\mu - (c\mu + d\nu)d\nu &= 0,
\end{aligned}$$

la cual se puede reescribir como

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{a\mu + b\nu}{c\mu + d\nu},$$

la cual es homogénea de grado cero y puede resolverse de manera similar a un ejemplo visto en clases

Ejercicio 6

Resuelva la ecuación:

$$(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0.$$

Respuesta: Veamos si esta ecuación es exacta. En este caso tenemos que:

$$M(x, y) = 1 - x^2 y, \qquad N(x, y) = x^2(y - x).$$

Lo que implica que:

---

[1] Ejercicio planteado en la Guía 2

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2yx - 3x^2.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta. La ecuación:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0,$$

será exacta. Este μ debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Por regla del producto,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu N_x - \mu N_y,$$

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y) \tag{3}$$

Recordamos que:

- Si $\frac{N_x - M_y}{N}$ depende sólo de x, $\mu = \mu(x)$,
- Si $\frac{N_x - M_y}{M}$ depende sólo de y, $\mu = \mu(y)$.

En este caso particular:

$$\frac{N_x - M_y}{N} = \frac{2yx - 3c^2 + x^2}{x^2(y-x)} = \frac{2yx - 2x^2}{x^2(y-x)} = \frac{2x(y-x)}{x^2(y-x)} = \frac{2}{x}.$$

Así, μ dependerá solo de x. (3) queda como:

$$-M_x N = \mu(N_x - M_y),$$
$$\frac{\mu_x}{\mu} = -\frac{1}{N}(N_x - M_y),$$
$$\frac{\mu_x(x)}{\mu(x)} = -\frac{N_x - M_y}{N}.$$

Integramos con respecto a x,

$$\int \frac{\mu_x(x)}{\mu(x)} dx = -\int \left(\frac{N_x - M_y}{N} \right) dx,$$
$$\log(\mu(x)) = -\int \frac{2}{x} dx,$$
$$\log(\mu(x)) = -2\ln(x) + C.$$

Despejamos μ,

$$\mu(x) = e^{-2\ln(x)} e^{c},$$
$$\mu(x) = \frac{A}{x^2}.$$

Sin pérdida de generalidad, elegimos $A = 1$. Así,

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Así, la ecuación diferencial

$$\mu M dx + \mu N dy = 0,$$

$$\left(\frac{1 - x^2 y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{x^2(y - x)}{x^2}\right) dy = 0,$$

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x)dy = 0$$

es exacta. Ahora podemos resolver como siempre. Llamaremos $\bar{M}(x, y) = \frac{1}{x^2} - y$, y $\bar{N}(x, y) = y - x$. Ahora queremos F tal que:

$$F_x = \bar{M}. \tag{4}$$

$$F_y = \bar{N}, \tag{5}$$

Integramos (4) con respecto a x,

$$F = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx,$$

$$F = -\frac{1}{x} - yx + g(y). \tag{6}$$

Derivando con respecto a y,

$$F_y = -x + g'(y).$$

Por (5),

$$y - x = -x + g'(y),$$

$$g'(y) = y.$$

Integrando con respecto a y,

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Reemplazando en (6),

$$F = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + C.$$

Así, esta es la solución implícita de la ecuación, con C real.

Ejercicio 7

Resuelva:

$$x^2y^2dx + (x^3y + y + 3)dy = 0.$$

Respuesta: Veamos si esta ecuación es exacta. En este caso tenemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3yx^2.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial no es exacta. Nuevamente buscamos μ tal que :

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y).$$

Vemos que:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{y},$$

por lo que μ depende sólo de y. Entonces se cumple:

$$\mu_y M = \mu(N_x - M_y),$$

$$\frac{\mu_y(y)}{\mu(y)} = \frac{N_x - M_y}{M}.$$

Interamos con respecto a y

$$\int \frac{\mu_y(y)}{\mu(y)} dy = \int \frac{1}{y} dy,$$

$$\log(\mu(y)) = \log(y) + C.$$

Despejamos μ

$$\mu(y) = Ae^{\log(y)},$$
$$\mu(y) = Ay.$$

Tomamos $A = 1$. Así, $\mu(y) = y$. Entonces la ecuación exacta a resolver es:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0,$$
$$y(x^2y^2)dx + y(x^3y^2 + y^2 + 3)dy = 0,$$
$$x^2y^3dx + (x^3y^3 + y^3 + 3y)dy = 0,$$

y ahora resolvemos como es usual. Sean $\bar{M}(x, y) = x^2y^3$, y $\bar{N}(x, y) = x^3y^3 + y^3 + 3y$. Queremos F tal que:

$$F_x = \bar{M}, \tag{7}$$
$$F_y = \bar{N}.$$

Integramos (7) con respecto a x,

$$F = \int x^2y^3dx,$$

$$F = \frac{x^3y^3}{3} + g(y).$$

Derivamos con respecto a y,

$$F_y = x^3y^2 + g'(y).$$

Entonces,

$$x^3y^2 + y^2 + 3y = x^3y^2 + g'(y),$$
$$g'(y) = y^2 + 3y.$$

Integramos con respecto a y,

$$g(y) = \int (y^2 + 3y)dy,$$
$$g(y) = \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + C.$$

Así, la solución estará dada implícitamente por:

$$F = \frac{x^3y^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + C,$$

con C real.