Ejercicio

Claudio Carrasco Gómez

Diciembre 2022

1. Sean $x, y \in C^1[0,1]$ dos soluciones de la ecuación $z' = t^2 + 2\sin(3z)$. Si $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$. Use el lema de Gronwall para demostrar que

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|e^6, \ \forall t \in [0,1]$$

<u>Solución</u>: Por hipótesis, sabemos que

$$x' = t^2 + 2\sin(3x)$$
$$y' = t^2 + 2\sin(3y)$$

Como x e y son de clase C^1 (tienen derivada continua), podemos integrar y aplicar el teorema fundamental del cálculo,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t s^2 + 2\sin(3x(s))ds$$
$$y(t) = y_0 + \int_0^t s^2 + 2\sin(3y(s))ds$$

Por tanto, para todo $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= \left| x_0 - y_0 + 2\int_0^t \sin(3x(s)) - \sin(3y(s))ds \right| \\ &\leq |x_0 - y_0| + \int_0^t 2|\sin(3x(s)) - \sin(3y(s))|ds \end{aligned}$$

Ahora note que para cada $s \in [0,1]$, la función $t \to \sin(t)$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[x(s), y(s)]$ (o en $[y(s), x(s)]$), por lo que existe $c(s) \in [x(s), y(s)]$ (o en $[y(s), x(s)]$) tal que

$$|\sin(x(s)) - \sin(y(s))| = 3|\cos(c(s))||x(s) - y(s)| \leq 3|x(s) - y(s)|$$

Por lo tanto,

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_0^t 6|x(s) - y(s)|ds$$

Por el lema de Gronwall, para todo $t \in [0,1]$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|e^{\int_0^t 6ds} = |x_0 - y_0|e^{6t} \underbrace{\leq}_{t\leq 1} |x_0 - y_0|e^6$$