



Ayudantías de Ecuaciones Diferenciales

Primavera 2022

14 de Noviembre de 2022

Profesor: Gonzalo Robledo

Ayudantes: Claudio Carrasco (*Lunes, 8:30*)
David Urrutia (*Lunes, 10:15*)
Valentina Calderón (*Lunes, 16:15*)

Ayudantía 8

Ejercicio 1.1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t) \quad (1)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Consideremos el sistema lineal homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (2)$$

donde A es como en el enunciado, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

y satisface $\det A = 16$ y $\text{tr} A = -8$ y por ende, el polinomio característico de A es $p_A(m) = m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2$ y su raíz es $m_1 = m_2 = m_0 = -4$.

Entonces, las soluciones del sistema (2) corresponde a los vectores

$$\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} A_1 e^{-4t} \\ B_1 e^{-4t} \end{pmatrix} = \vec{C}_1 e^{-4t} \quad y \quad \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} (A_2 + A_3 t) e^{-4t} \\ (B_2 + B_3 t) e^{-4t} \end{pmatrix} = (\vec{C}_2 + t\vec{C}_3) e^{-4t}$$

siendo $\vec{C}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{C}_2 = (A_2, B_2)$ y $\vec{C}_3 = (A_3, B_3)$ vectores en $\mathbb{R}^2$ a determinar¹.

¹Compactifiqué la notación para simplificar los cálculos de los números A_i, B_i, C_i de las coordenadas

Por un lado, si resolvemos $\vec{v}_1$ al igual que como se hizo en la ayudantía pasada, podemos notar que

$$A\vec{C}_1 e^{-4t} = A\vec{v}_1(t) = \frac{d\vec{v}_1}{dt}(t) = -4\vec{C}_1 e^{-4t},$$

entonces, si consideramos I como la matriz identidad $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, al reemplazar $\vec{C}_1 = (A_1, B_1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} -4\vec{C}_1 &= A\vec{C}_1 \\ \implies (A + 4I)\vec{C}_1 &= 0 \\ \implies (A + 4I)\vec{C}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 - B_1 \\ A_1 + B_1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

y por igualdad por coordenadas, se tiene

$$\begin{cases} -A_1 - B_1 = 0 \\ A_1 + B_1 = 0 \end{cases}$$

lo cual implica que $A_1 = -B_1 = 1$ resuelven el sistema anterior, es decir, nos basta con considerar $\vec{C}_1 = (1, -1)$ y por ende

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Por otro lado, para ver lo que pasa con $\vec{v}_2$, hacemos lo mismo que lo realizado con $\vec{v}_1$, es decir:

$$\frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = \frac{d(\vec{C}_2 + t\vec{C}_3)e^{-4t}}{dt} = \vec{C}_3 e^{-4t} - 4(\vec{C}_2 + t\vec{C}_3)e^{-4t} = (\vec{C}_3 - 4\vec{C}_2 - 4t\vec{C}_3)e^{-4t} = A(\vec{C}_2 + t\vec{C}_3)e^{-4t},$$

luego,

$$\vec{C}_3 - 4\vec{C}_2 - 4t\vec{C}_3 = A\vec{C}_2 + tA\vec{C}_3$$

y tenemos que esa igualdad es cierta si y solo si

$$-4\vec{C}_3 = A\vec{C}_3 \quad \text{y} \quad \vec{C}_3 - 4\vec{C}_2 = A\vec{C}_2$$

y notemos que la ecuación de la izquierda es idéntica a la que fue resuelta con $\vec{C}_1$, entonces, sólo nos basta considerar $\vec{C}_3 = \vec{C}_1 = (1, -1)$.

La segunda ecuación vectorial queda entonces,

$$\vec{C}_3 - 4\vec{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\vec{C}_2 = A\vec{C}_2 \implies \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (A + 4I)\vec{C}_2 = \begin{pmatrix} -A_2 - B_2 \\ A_2 + B_2 \end{pmatrix}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} -A_2 - B_2 &= 1 \\ A_2 + B_2 &= -1 \end{aligned}$$

los cuales son idénticos, entonces, $B_2 = -(1 + A_2)$, luego, al considerar $A_2 = 1$, se tiene que $B_2 = -2$ y por ende, $\vec{C}_2 = (A_2, B_2) = (1, -2)$, de modo que

$$\vec{v}_2 = (\vec{C}_2 + t\vec{C}_3)e^{-4t} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2-t \end{pmatrix} e^{-4t},$$

luego, los vectores

$$\vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -e^{-4t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-4t} \\ (-2-t)e^{-4t} \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes y por ende, la matriz

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} & (1+t)e^{-4t} \\ -e^{-4t} & -(2+t)e^{-4t} \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de (2) cuyo determinante es

$$\det X(t) = \det \begin{bmatrix} e^{-4t} & (1+t)e^{-4t} \\ -e^{-4t} & -(2+t)e^{-4t} \end{bmatrix} = e^{-4t}$$

y por tanto, su inversa es

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{\det X(t)} \begin{bmatrix} -(2+t)e^{-4t} & -(1+t)e^{-4t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2+t) & -(1+t) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, una solución de (4) es de la forma

$$\vec{v}(t) = c_1 \vec{v}_1(t) + c_2 \vec{v}_2(t) + X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds$$

entonces, falta calcular $\vec{v}_p(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds$ y estaríamos listos con el ejercicio.

Por un lado, notemos que

$$X^{-1}(s) \vec{f}(s) = \begin{bmatrix} -(2+s) & -(1+s) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2s \\ 2 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \vec{v}_p(t) &= X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds = X(t) \int_0^t \begin{pmatrix} -3-2s \\ 2 \end{pmatrix} ds \\ &= X(t) \begin{pmatrix} -\int_0^t 3+2s ds \\ 2 \int_0^t ds \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} -3t-t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-4t} & (1+t)e^{-4t} \\ -e^{-4t} & -(2+t)e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3t-t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = e^{-4t} \begin{pmatrix} -3t-t^2+(1+t)2t \\ 3t+t^2-2t(2+t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y por ende,

$$\vec{v}(t) = e^{-4t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2(1+t) - 3t - t^2 + 2t(1+t) \\ -c_1 - c_2(2+t) + 3t + t^2 - 2t(2+t) \end{pmatrix}$$

que es lo que se pedía. □

Ejercicio 1.2.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t) \quad (3)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Primero debemos resolver el sistema homogéneo asociado. Es decir, consideremos el sistema,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (4)$$

El polinomio característico de la matriz es $p(m) = m^2 - \text{tr}(A)m + \det A = m^2 - 4m + 29$. Las raíces de este polinomio son $z = 2 + 5i$ y $\bar{z} = 2 - 5i$. Así, dos soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo son,

$$\begin{aligned} (x_1(t), y_1(t)) &= e^{2t}(A_1 \cos(5t) - A_2 \sin(5t), B_1 \cos(5t) - B_2 \sin(5t)) \\ (x_2(t), y_2(t)) &= e^{2t}(A_1 \sin(5t) + A_2 \cos(5t), B_1 \sin(5t) + B_2 \cos(5t)) \end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ son tales que el vector $x = (A_1 + iA_2, B_1 + iB_2)$ satisface,

$$Ax = (2 + 5i)x$$

Llamemos $z_1 = A_1 + iA_2$ y $z_2 = B_1 + iB_2$. Entonces tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2z_1 - 5z_2 &= 2z_1 + 5iz_1 \implies -z_2 = iz_1 \\ 5z_1 + 2z_2 &= 2z_2 + 5iz_2 \implies z_1 = iz_2 \end{aligned}$$

Claramente son ecuaciones equivalentes. Eligiendo $z_1 = 1$, tendremos que $z_2 = -i$. Es decir, $A_1 = 1, A_2 = 0, B_1 = 0, B_2 = -1$. Por lo tanto, las soluciones buscadas son,

$$\begin{aligned} (x_1(t), y_1(t)) &= e^{2t}(\cos(5t), \sin(5t)) \\ (x_2(t), y_2(t)) &= e^{2t}(\sin(5t), -\cos(5t)) \end{aligned}$$

Es decir, la matriz fundamental es,

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos(5t) & e^{2t} \sin(5t) \\ e^{2t} \sin(5t) & -e^{2t} \cos(5t) \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es

$$X^{-1}(t) = -e^{-4t} \begin{bmatrix} -e^{2t} \cos(5t) & -e^{2t} \sin(5t) \\ -e^{2t} \sin(5t) & e^{2t} \cos(5t) \end{bmatrix}$$

Por otro lado, una solución particular del sistema, viene dada por,

$$U_p(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos(5t) & e^{2t} \sin(5t) \\ e^{2t} \sin(5t) & -e^{2t} \cos(5t) \end{bmatrix} \int_0^t -e^{-4s} \begin{bmatrix} -e^{2s} \cos(5s) & -e^{2s} \sin(5s) \\ -e^{2s} \sin(5s) & e^{2s} \cos(5s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} e^{2t} \cos(5t) & e^{2t} \sin(5t) \\ e^{2t} \sin(5t) & -e^{2t} \cos(5t) \end{bmatrix} \int_0^t -e^{-4s} \begin{pmatrix} -e^{4s} \cos(5t) \\ -e^{4s} \sin(5t) \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t} \cos(5t) & e^{2t} \sin(5t) \\ e^{2t} \sin(5t) & -e^{2t} \cos(5t) \end{bmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(5t) \\ \sin(5t) \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t} \cos(5t) & e^{2t} \sin(5t) \\ e^{2t} \sin(5t) & -e^{2t} \cos(5t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sin(5t)}{5} \\ -\frac{\cos(5t)}{5} + \frac{1}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así, la solución del sistema viene dada por,

$$(x(t), y(t)) = C_1 e^{2t} (\cos(5t), \sin(5t)) + C_2 e^{2t} (\sin(5t), -\cos(5t)) + U_p(t); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Ejercicio 1.3. Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \quad (5)$$

donde $a, b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en $[a, b]$. Demuestre que la ecuación puede ser resuelta al resolver el sistema

$$x' = A(t)x + \vec{r}(t) \quad (6)$$

donde $A : [a, b] \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ corresponde a la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix}$$

mientras que $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ puede es el vector

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea $t \mapsto y(t)$ una solución de la ecuación (6) y consideremos el vector $\vec{x}(t) = (y, y')$, nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{x}}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y' \\ -a(t)y' - b(t)y + f(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y' \\ -a(t)y' - b(t)y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = A(t)\vec{x} + \vec{r}(t)
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

□

Ejercicio 1.4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x' = 2x + y + 1,$$

$$y' = -2x - y + 5.$$

cuyas condiciones iniciales son $y(0) = x(0) = 0$.

Solución. Tenemos un sistema de la forma:

$$z'(t) = Az(t) + f(t),$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y } f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vemos que $\det A = 0$ y $\text{tr} A = 1$, por lo que el polinomio característico será $p(m) = m^2 - m = m(m - 1)$, cuyas soluciones son $m_1 = 1$ y $m_2 = 0$. Luego, la solución del sistema será:

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t),$$

donde $z_h(t)$ es la solución del sistema homogéneo y $z_p(t)$ es una solución particular del sistema. Primero encontramos z_h . z_h estará dada por:

$$z_h = z_1 + z_2,$$

donde z_i corresponde a:

$$z_i = C_i e^{m_i t} V_i,$$

donde V_1 cumple:

$$AV_i = m_i V_i,$$

Para $m_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Consideramos las soluciones $V_{11} = -1$ y $V_{12} = 1$. Así,

$$z_1 = (x(t), y(t)) = (-C_1 e^t, C_1 e^t).$$

Para $m_2 = 0$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0$$

Consideramos las soluciones $V_{21} = -1$ y $V_{22} = 2$. Así,

$$z_1 = (x(t), y(t)) = (-C_2, 2C_2).$$

Así, $z_h(t)$ es:

$$z_h(t) = (x(t), y(t)) = (-C_1 e^t - C_2, C_1 e^t + 2C_2).$$

Ahora busquemos una solución particular $x_p(t)$. Consideremos soluciones de la forma:

$$x = a_1 t + a_0,$$

$$y = b_1 t + b_0.$$

Calculando las derivadas,

$$x' = a_1,$$

$$y' = b_1.$$

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones, obtenemos que $a_0 = -7/2$, $a_1 = -6$, $b_0 = 0$ y $b_1 = 12$. Entonces,

$$z_p = (x(t), y(t)) = \left(-6t - \frac{7}{2}, 12t\right).$$

Así, la solución general del sistema de ecuaciones es:

$$(x(t), y(t)) = \left(-C_1 e^t - 6t - C_2 - \frac{7}{2}, C_1 e^t + 12t + 2C_2\right).$$

Utilizamos las condiciones iniciales para obtener las constantes, y obtenemos $C_1 = -7$ y $C_2 = \frac{7}{2}$. Así, la solución es:

$$(x(t), y(t)) = (7e^t - 6t - 7, -7e^t + 12t + 7).$$

□