Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales

26 de octubre de 2022

Profesor: Gonzalo Robledo

Ayudantes: Claudio Carrasco *(Lunes, 8:30)*
David Urrutia *(Lunes, 10:15)*
Valentina Calderón *(Lunes, 16:15)*

CONTROL 2

Ejercicio 1.1. Usando el método de variación de parámetros, encuentre una solución a la ecuación diferencial

$$y'' + a^2 y = \tan(ax) \tag{1}$$

donde $a \neq 0$.

Solución. Recordemos que la solución de la ecuación diferencial (1) es

$$x \mapsto y_g(x) = y_l(x) + y_p(x)$$

donde $x \mapsto y_l(x)$ es solución de la ecuación lineal homogenea

$$y'' + a^2 y = 0. \tag{2}$$

Notemos que el polinomio característico asociado a (2) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a^2$$

cuyas raíces son $\lambda_{\pm} = \pm i\, a$, entonces, las soluciones LI de la ecuación homogénea $y'' + a^2 y = 0$ son

$$x \mapsto y_1(x) = \cos(ax) \quad \text{y} \quad x \mapsto y_2(x) = \sin(ax).$$

y por ende,

$$y_l(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax).$$

Falta calcular y_p. Recuerde que y_p verifica

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)\tan(ax)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)\tan(ax)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx$$

donde

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(ax) & \sin(ax) \\ -a\sin(ax) & a\cos(ax) \end{pmatrix} = a,$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= -\cos(ax)\int \frac{\sin(ax)\tan(ax)}{a}\,dx + \sin(ax)\int \frac{\cos(ax)\tan(ax)}{a}\,dx \\
&= -\frac{\cos(ax)}{a}\int \frac{\sin^2(ax)}{\cos(ax)}\,dx + \sin(ax)\int \sin(ax)\,dx \\
&= -\frac{\cos(ax)}{a}\int \frac{\sin^2(ax)}{\cos(ax)}\,dx + \sin(ax)\int \sin(ax)\,dx \\
&= -\frac{\cos(ax)}{a}\int \frac{1-\cos^2(ax)}{\cos(ax)}\,dx + \sin(ax)\int \sin(ax)\,dx \\
&= -\frac{\cos(ax)}{a}\int \sec(ax)-\cos(ax)\,dx + \sin(ax)\int \sin(ax)\,dx \\
&= -\frac{\cos(ax)\ln(|\tan(ax)+\sec(ax)|)}{a^2} + \sin(2ax)\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2a}\right) + C
\end{aligned}
$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Por ende,

$$
y_g(x) = c_1\cos(ax) + c_2\sin(ax) - \frac{\cos(ax)\ln(|\tan(ax)+\sec(ax)|)}{a^2} + \sin(2ax)\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2a}\right) + C
$$

lo cual es lo pedido.

Ejercicio 1.2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando la transformada de Laplace.

$$
y'' + 2y' + 2y = 0,
$$

con $y(0) = 0$, e $y'(0) = 1$.
Solución. Aplicamos la Transformada de Laplace:

$$
\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 2y\} = 0.
$$

Por la linealidad de latransformada,

$$
\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 0.
$$

Recordemos que:

$$
\mathcal{L}\{y\} = \hat{y},
$$

$$
\mathcal{L}\{y''\} = s^2\hat{y} - sy(0) - y'(0),
$$

$$
\mathcal{L}\{y'\} = s\hat{y} - y(0).
$$

Así, nos queda lo siguiente:

$$s^2\hat{y} - sy(0) - y'(0) + 2[s\hat{y} - y(0)] + 2\hat{y} = 0,$$

$$s^2\hat{y} - 1 + 2s\hat{y} + 2\hat{y} = 0,$$

$$\hat{y}(s^2 + 2s + 2) = 1,$$

$$\hat{y} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}.$$

Ahora aplicasmos la transformada inversa para obtener $y(x)$.

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right\}.$$

Esto es equivalente a:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\}.$$

Ahora recordamos la regla de la transformada inversa: Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x)$. Vemos que para

$$\frac{1}{(s+1)^2 + 1} \quad \Longrightarrow a = -1, \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Así,

$$y(x) = e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}.$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin(x)$, tendremos que:

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}.$$

Ejercicio 1.3. Determine si las funciones $y_1(x) = \sin(e^x)$ e $y_2(x) = \cos(e^x)$ son soluciones de la ecuacion diferencial de segundo orden

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0$$

para $x \in [a, b]$.

En caso de que sean soluciones, determine si son linealmente independientes o linealmente dependientes en $[a, b]$.

Solución

Veamos que:

$$y_1'(x) = \cos(e^x)e^x$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= -\sin(e^x)e^{2x} + \cos(e^x)e^x \\ &= -y_1(x)e^{2x} + y_1'(x). \end{aligned}$$

Es decir,

$$y_1''(x) - y_1'(x) + e^{2x}y_1(x) = 0$$

y por lo tanto. $x \mapsto y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

También veamos que:

$$y_2'(x) = -\sin(e^x)e^x$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} y_2''(x) & = & -\cos(e^x)e^{2x} - \sin(e^x)e^x \\ & = & -y_2(x)e^{2x} + y_2'(x). \end{array}$$

Es decir

$$y_2''(x) - y_2'(x) + e^{2x}y_2(x) = 0$$

y por lo tanto. $x \mapsto y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

Notemos que

$$y_1'(x) = y_2(x)e^x \Rightarrow y_1'(x)y_2(x) = y_2^2(x)e^x$$

y además

$$y_2'(x) = -y_1(x)e^x \Rightarrow y_1(x)y_2'(x) = -y_1^2(x)e^x$$

Calcularemos el Wronskiano

$$W\{y_1, y_2\}(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = -\sin^2(e^x)e^x - \cos^2(e^x)e^x = -e^x$$

y se concluye la independencia lineal.