Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales

26 de octubre de 2022

Profesor: Gonzalo Robledo

Ayudantes: Claudio Carrasco *(Lunes, 8:30)*
David Urrutia *(Lunes, 10:15)*
Valentina Calderón *(Lunes, 16:15)*

CONTROL 2

Ejercicio 1.1. Usando el método de variación de parámetros, encuentre una solución a la ecuación diferencial

$$y'' - (a+b)y' + aby = xe^{(a+b)x} \tag{1}$$

donde $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq b$.

Solución. Recordemos que la solución de la ecuación diferencial (1) es

$$x \mapsto y_g(x) = y_l(x) + y_p(x)$$

donde $x \mapsto y_l(x)$ es solución de la ecuación lineal homogenea

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0. \tag{2}$$

Notemos que el polinomio característico asociado a (2) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = b$ de multiplicidad 2, entonces, las soluciones LI de la ecuación homogénea $y'' - (a+b)y' + aby = 0$ son

$$x \mapsto y_1(x) = e^{ax} \quad \text{y} \quad x \mapsto y_2(x) = e^{bx}.$$

y por ende,

$$y_l(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}.$$

Falta calcular y_p. Recuerde que y_p verifica

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x) x e^{(a+b)x}}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) x e^{(a+b)x}}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx$$

donde

$$W(y_1,y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ ae^{ax} & be^{bx} \end{pmatrix} = (b-a)e^{(a+b)x},$$

entonces,

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -e^{ax}\int \frac{e^{bx}xe^{(a+b)x}}{e^{(a+b)x}(b-a)}\,dx + e^{bx}\int \frac{e^{ax}xe^{(a+b)x}}{e^{(a+b)x}(b-a)}\,dx \\
&= -e^{ax}\int \frac{xe^{bx}}{(b-a)}\,dx + e^{bx}\int \frac{xe^{ax}}{(b-a)}\,dx \\
&= -\frac{e^{ax}}{(b-a)}\int xe^{bx}\,dx + \frac{e^{bx}}{(b-a)}\int xe^{ax}\,dx \\
&= -\frac{e^{ax}}{(b-a)}\left\{\frac{xe^{bx}}{b} - \frac{e^{bx}}{b^2}\right\} + \frac{e^{bx}}{(b-a)}\left\{\frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\right\} \\
&= -\frac{e^{(a+b)x}}{(b-a)}\left\{\frac{x}{b} - \frac{1}{b^2}\right\} + \frac{e^{(a+b)x}}{(b-a)}\left\{\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right\} \\
&= \frac{e^{(a+b)x}}{(b-a)}\left\{-\frac{x}{b} + \frac{1}{b^2} + \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right\} \\
&= \frac{e^{(a+b)x}}{(b-a)}\left\{\frac{x(b-a)}{ab} - \frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right\} \\
&= e^{(a+b)x}\left\{\frac{x}{ab} - \frac{a+b}{a^2b^2}\right\} + C
\end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Por ende,

$$y_g(x) = c_1e^{ax} + c_2e^{bx} + e^{(a+b)x}\left\{\frac{x}{ab} - \frac{a+b}{a^2b^2}\right\} + C$$

lo cual es lo pedido.

Ejercicio 1.2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando la transformada de Laplace.

$$y'' + 4y' + 5y = 0,$$

con $y(0) = 1$, e $y'(0) = -4$.

Solución. Aplicamos la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 5y\} = 0.$$

Por la linealidad de latransformada,

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = 0.$$

Recordemos que:

$$\mathcal{L}\{y\} = \hat{y},$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\hat{y} - sy(0) - y'(0),$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\hat{y} - y(0).$$

Así, nos queda lo siguiente:

$$s^2\hat{y} - sy(0) - y'(0) + 4[s\hat{y} - y(0)] + 5\hat{y} = 0,$$

$$s^2\hat{y} - s + 4 + 4s\hat{y} - 4 + 5\hat{y} = 0,$$

$$\hat{y}(s^2 + 4s + 5) = s,$$

$$\hat{y} = \frac{s}{s^2 + 4s + 5}.$$

Ahora aplicasmos la transformada inversa para obtener $y(x)$.

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4s + 5}\right\}.$$

Esto es equivalente a:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right\}.$$

Ahora recordamos la regla de la transformada inversa: Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x)$. Vemos que para

$$\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} \quad \Longrightarrow a = 2, \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + 1},$$

y para

$$\frac{1}{(s+2)^2 + 1} \quad \Longrightarrow a = 2, \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Así,

$$y(x) = e^{-2x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} - 2e^{-2x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}.$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin(x)$, y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(x)$, tendremos que:

$$y(x) = \frac{\cos(x) - 2\sin(x)}{e^{2x}}.$$

Ejercicio 1.3. Construya una ecuación diferencial que tenga las soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = e^{-2022x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{-2022x}$$

Solución. La ecuación debe ser de la forma

$$y'' + ay' + by = 0$$

donde $p^2 + ap + b = 0$ tiene una raiz doble $p = -2022$.

Es decir

$$p^2 + ap + b = (p + 2022)^2 = p^2 + 4044p + 2022^2.$$

La ecuación será

$$y'' + 4044y' + 2022^2 y = 0.$$