UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales

26 de octubre de 2022

Profesor: Gonzalo Robledo

Ayudantes: Claudio Carrasco *(Lunes, 8:30)*
David Urrutia *(Lunes, 10:15)*
Valentina Calderón *(Lunes, 16:15)*

CONTROL 2

Ejercicio 1.1. Usando el método de variación de parámetros, encuentre una solución a la ecuación diferencial

$$y'' - 2ay' + a^2y = a \tag{1}$$

donde $a \neq 0$.

Solución. Recordemos que la solución de la ecuación diferencial (1) es

$$x \mapsto y_g(x) = y_l(x) + y_p(x)$$

donde $x \mapsto y_l(x)$ es solución de la ecuación lineal homogenea

$$y'' - 2ay' + a^2y = 0. \tag{2}$$

Notemos que el polinomio característico asociado a (2) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2$$

cuya raíz es $\lambda_{=}a$ de multiplicidad 2, entonces, las soluciones LI de la ecuación homogénea $y'' - 2ay' + a^2y = 0$ son

$$x \mapsto y_1(x) = e^{ax} \quad \text{y} \quad x \mapsto y_2(x) = xe^{ax}.$$

y por ende,

$$y_l(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}.$$

Falta calcular y_p. Recuerde que y_p verifica

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)a}{W(y_1,y_2)(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)a}{W(y_1,y_2)(x)}\,dx$$

donde

$$W(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^{ax} & xe^{ax} \\ ae^{ax} & (1+ax)e^{ax} \end{pmatrix} = e^{2ax},$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= -e^{ax}\int \frac{xe^{ax}a}{e^{2ax}}\,dx + xe^{ax}\int \frac{ae^{ax}}{e^{2ax}}\,dx \\
&= -e^{ax}\int axe^{-ax}\,dx + xe^{ax}\int ae^{-ax}\,dx \\
&= e^{ax}\int -axe^{-ax}\,dx + xe^{ax}\int ae^{-ax}\,dx \\
&= e^{ax}\left(xe^{-ax} + \frac{e^{-ax}}{a}\right) - xe^{ax}e^{-ax} \\
&= \left(x + \frac{1}{a}\right) - x \\
&= \frac{1}{a} + C
\end{aligned}
$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Por ende,

$$y_g(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + \frac{1}{a} + C$$

lo cual es lo pedido.

Ejercicio 1.2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando la transformada de Laplace.

$$y'' - 4y' + 5y = 0,$$

con $y(0) = 1$, e $y'(0) = 2$.

Solución. Aplicamos la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y'' - 4y' + 5y\} = 0.$$

Por la linealidad de latransformada,

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = 0.$$

Recordemos que:

$$\mathcal{L}\{y\} = \hat{y},$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\hat{y} - sy(0) - y'(0),$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\hat{y} - y(0).$$

Así, nos queda lo siguiente:

$$s^2\hat{y} - sy(0) - y'(0) - 4[s\hat{y} - y(0)] + 5\hat{y} = 0,$$

$$s^2\hat{y} - s - 2 - 4s\hat{y} + 4 + 5\hat{y} = 0,$$

$$\hat{y}(s^2 - 4s + 5) = s - 2,$$

$$\hat{y} = \frac{s-2}{s^2 - 4s + 5}.$$

Ahora aplicasmos la transformada inversa para obtener $y(x)$.

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2 - 4s + 5}\right\}.$$

Esto es equivalente a:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}\right\}.$$

Ahora recordamos la regla de la transformada inversa: Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x)$. Vemos que para

$$\frac{s-2}{(s-2)^2+1} \implies a = -2, \quad F(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Así,

$$y(x) = e^{2x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}.$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin(x)$, y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(x)$, tendremos que:

$$y(x) = e^{2x}\cos(x).$$

Ejercicio 1.3. Considere el problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + ay' + by &=& c \\ y(x_0) &=& \frac{c}{b} \\ y'(x_0) &=& 0 \end{array}\right.$$

con $t_0 \in [p, q]$ y $b \neq 0$.

Justifique que la unica solución es $x \mapsto \frac{c}{b}$.

Solución. Como las funciones constantes son continuas, se puede aplicar el Teorema de existencia y unicidad, el cual nos permite concluir que el problema de Cauchy tiene una solución única.

Veamos que la función constante $y(x) = \frac{c}{b}$ verifica

$$y'(x) = y''(x) = 0 \quad \forall x \in [p, q].$$

Por lo tanto,

$$y''(x) + y'(x) + b\frac{c}{b} = c$$

y se tiene que es solución.

Ademas se tiene que $y(x_0) = \frac{c}{b}$ con $y'(x_0) = 0$. Asi se concluye la demostración.