EJERCICIOS (2022)

1. Separación de Variables

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales* de H.B. Phillips. Editorial UTHEA, México, 1956.

1.- $(y^2-1)dx-(2y+xy)dy=0.$
2.- $x\sqrt{1-y}dx-\sqrt{1-x^2}dy=0.$
3.- $ydx+(x+xy)dy=0.$
4.- $x\,dx+y\,dy=xy(x\,dy-y\,dx)$
5.- $\tan(x)\sin^2(y)\,dx+\cos^2(x)\cot(y)\,dy=0.$
6.- $\cos(\theta)\,dr-2r\sin(\theta)\,d\theta=0.$
7.- $2r\cos(\theta)\,dr-\tan(\theta)\,d\theta=0.$
8.- $r\sec(\theta)\,dr-2a^2\sin(\theta)\,d\theta=0.$
9.- $(1-\tan^2(\theta))\,dr+2r\tan(\theta)\,d\theta$
10.- $dx-\sqrt{a^2-x^2}\,dy=0.$

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales con álgebra lineal* de Albert L. Rabenstein, Ed. CECSA, México, 1973.

1.- $yy'=4x, \quad y(1)=-3.$
2.- $xy'=4y, \quad y(1)=-3.$
3.- $y'=2xy^2, \quad y(2)=1.$
4.- $y'=e^x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y(0)=\frac{1}{2}.$
5.- $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(2)=3.$
6.- $y'=e^y y'=4, \quad y(0)=2.$
7.- $2(y-1)y'=e^x, \quad y(0)=-2.$
8.- $2y'=y(y-2).$
9.- $3y^2y'=(1+y^3)\cos(x).$
10.- $\cos^2(x)y'=y^2(y-1)\sin(x).$

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Differential Equations with Boundary–Value Problems* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Página 45.

1.- $dx-x^2dy=0$
2.- $dx+e^{3x}dy=0$
3.- $(x+1)\frac{dy}{dx}=x$
4.- $e^x\frac{dy}{dx}=0$
5.- $(1+x^2+y^2+x^2y^2)dy=y^2dx$
6.- $\frac{dy}{dx}+2xy=0$
7.- $\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{x^2}$
8.- $\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x}$
9.- $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2y^2}{1+x}$
10.- $\frac{dx}{dy}=\frac{1+2y^2}{y\sin x}$

Los siguientes ejercicios son extraidos del libro *Differential Equations* de Frank Ayres, Schaum Publishing, 1952.

1.- $x^3 dx + (y+1)^2 dy = 0$
2.- $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$
3.- $y\,dx + (x^2 - 4x)dy = 0$
4.- $x(y-3)dy - 4ydx = 0$
5.- $(1+x^3)dy - x^2 y\,dx = 0$ con $y(1) = 2$.

2. Ecuación Logística

En clases estudiamos la ecuación logística

$$\frac{dy}{dx} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

donde $r > 0$ y $K > 0$ son constantes conocidas como *tasa de crecimiento maximal* y *Capacidad de carga* respectivamente. Esta ecuación es ampliamente usada en ecología. Supondremos que esta ecuación tiene una condición inicial $y(0) = y_0$.

1.- Demuestre que si $y_0 \in (0, K)$, entonces la solución $x \mapsto y(x)$ es estrictamente creciente.
2.- Demuestre que si $y_0 \in (K, +\infty)$, entonces la solución $x \mapsto y(x)$ es estrictamente decreciente.
3.- Qué ocurre si $y_0 = K$?
4.- Qué ocurre si $y_0 = 0$?, Qué ocurre si $y_0 < 0$?.
5.- Si la condición inicial es $y_0 = \frac{K}{4}$, encuentre el valor de x tal que la la solución verifique $y(x) = \frac{3}{4}K$

3. Ecuaciones homogéneas

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales elementales* de Earl D. Rainville. Editorial Trillas, México, 1973.

1.- $(x - 2y)\,dx + (2x + y)\,dy = 0$.
2.- $2(2x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$.
3.- $xy\,dx - (x^2 + 3y^2)\,dy = 0$.
4.- $x^2 y' = 4x^2 + 7xy + 2y^2$.
5.- $3xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.
6.- $(x - y)(4x + y)\,dx + x(5x - y)\,dy = 0$.
7.- $(5v - u)\,du + (3v - 7u)\,dv = 0$.
8.- $(x^2 + 2xy - 4y^2)\,dx - (x^2 - 8xy - 4y^2)\,dy = 0$.
9.- $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$.
10.- $v^2\,dx + x(v - 4x)\,dv = 0$.
11.- $(2x + y)^2\,dx = xy\,dy$.
12.- $y\,dx = (x + \sqrt{y^2 - x^2})$.
13.- $(3x^2 - 2xy + 3y^2)\,dx = 4xy\,dy$.
14.- $[x\,\mathrm{cosec}(y/x) - y]\,dx + x\,dy = 0$.
15.- $x\,dx + \sin^2(y/x)[y\,dx - x\,dy] = 0$.

Los siguientes ejercicios son extraidos del libro *Differential Equations* de Frank Ayres, Schaum Publishing, 1952.

1.- $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$
2.- $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 - y^2}dx = 0$

3.- $\left(2x\sinh(\frac{y}{x}) + 3y\cosh(\frac{y}{x})\right)dx - 3x\cosh(\frac{y}{x})dy = 0$
4.- $(2x+3y)dx + (y-x)dy = 0$
5.- $(1+2e^{\frac{y}{x}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{y}{x})dy = 0$

Los siguientes ejercicios son extraidos del libro *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* de Dalia Pishlov, Ediciones Bak, Tel Aviv, 2007.

1.- $y^2 + x^2y' = xyy'$
2.- $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$
3.- $2xy' = 2y + \sqrt{x^2+4y^2}$
4.- $xy' = y\cos(\ln(\frac{y}{x}))$

Los siguientes ejericicios están basados en el Ejemplo 2 (página 337) del Libro *Introducción al análisis lineal, Parte I* de Donald Kreider, Robert G. Kuller, Donald R. Ostberg y F.W. Perkins. Fondo Educativo Interamericano, México, 1971.

1.- Demuestre que toda ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+k_1}{cx+dy+k_2}$$

donde a, b, c, d, k_1 y k_2 son constantes tales que $ad - bc \neq 0$, puede reducirse a una ecuacion homogénea de grado cero mediante los cambios de variable

$$x = \mu + \alpha \quad \text{e} \quad y = \nu + \beta$$

donde α y β son constantes.

2.- Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7y-9x-1}{7x+4y-37}$$

3.- Demuestre que toda ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+k_1}{cx+dy+k_2}$$

donde a, b, c, d, k_1 y k_2 son constantes tales que $ad - bc = 0$ y $b \neq 0$. Demuestre que la sustitutción $u = ax + by$ transforma esta ecuación en una de variables separables. *Sugerencia*: encuentre una constante λ tal que $cx + dy = \lambda(ax + by)$

4. Ecuaciones lineales de primer orden

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales elementales* de Earl D. Rainville. Editorial Trillas, México, 1973. Páginas 52–53.

1.- $(x^5 + 3y)\,dx - x\,dy = 0,$
2.- $2(2xy + 4y - 3)\,dx + (x+2)^2\,dy = 0,$
3.- $y' = x - 2y,$
4.- $(y+1)\,dx + (4x - y)\,dy = 0,$
5.- $u\,dx + (1-3u)x\,du = 3u^2e^{3u}\,du,$
6.- $u\,dx + (1-3u)x\,du = 3u\,du,$
7.- $y' = x - 4xy,$
8.- $y' = \operatorname{cosec}(x) + y\cot(x),$
9.- $y' = \operatorname{cosec}(x) - y\cot(x),$
10.- $(2xy + x^2 + x^4)\,dx - (1+x^2)\,dy = 0,$
11.- $(y - \cos^2(x))\,dx + \cos(x)\,dy = 0,$

12.- $y' = x - 2y\cot(2x)$,
13.- $(y - x + xy\cot(x))\,dx + x\,dy = 0$,
14.- $y' - my = c_1 e^{mx}$,
15.- $y' - m_2 y = c_1 e^{m_1} x$ donde $m_1 \neq m_2$.

El siguiente ejercicio extiende un resultado visto en clases: Considere la ecuación diferencial

$$y' + ay = b \quad \text{donde } a < 0 \text{ y } b \neq 0.$$

con condición inicial $y(0) = y_0$

i) Si $x \mapsto y(x)$ es solución de la ecuación. Que se puede decir de $y(x)$ cuando x tiende a $-\infty$?.
ii) Demuestre que $x \mapsto y(x)$ es estrictamente creciente cuando $y_0 > \frac{b}{a}$.
iii) Demuestre que $x \mapsto y(x)$ es estrictamente decreciente cuando $y_0 < \frac{b}{a}$.

Los siguientes ejercicios corresponden al libro *Ecuaciones Diferenciales con Álgebra Lineal* de Albert L. Rabenstein, CECSA, México, 1973, página 36.

1.- Se dice que una función f es acotada en un intervalo I si existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Sea $q\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua y acotada en $[0, +\infty[$. Si $k > 0$, demuestre que cada solución de la ecuación diferencial

$$y' = -ky + q(x)$$

es acotada en $[0, +\infty[$.

2.- Con las mismas hipótesis del ejercicio anterior, demuestre que la ecuación diferencial

$$y' = ky + q(x)$$

tiene soluciones que no son acotadas en $[0, +\infty[$.

3.- Sea $q\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x \to +\infty} q(x) = L.$$

Demuestre que toda solución $y(x)$ de la ecuación diferencial

$$y' = -ky + q(x)$$

verifica $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{L}{k}$.

Los siguientes ejercicios corresponden a las páginas 119–120 del libro *Introducción al análisis lineal, Parte I* de Donald Kreider, Robert G. Kuller, Donald R. Ostberg y F.W. Perkins. Fondo Educativo Interamericano, México, 1971.

1.- $xy' + 2y = 0$ *Ayuda:* note que la ecuación puede escribirse como $y' + \frac{2}{x}y = 0$
2.- $(1 - x^2)y' - y = 0$
3.- $\sin(x)y' + 3y = e^{-x}$
4.- $3y' + ky = 0$ (k es una constante)
5.- $2y' + 3y = e^{-x}$
6.- $3xy' - y = \ln(x) + 1$
7.- $(3x^2 + 1)y' - 2xy = 6x$
8.- $(x^2 + 1)y' - (1 - x)^2 y = xe^{-x}$
9.- $(x^2 + 1)y' + xy = (1 - 2x)\sqrt{x^2 + 1}$
10.- $x\sin(x)y' + (\sin(x) + x\cos(x))y = xe^x$
11.- $xy' + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}y = 1 + \sqrt{2x + 1}$

12.- $xy' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = (1 + \sqrt{1-x^2})e^x$
13.- $\sin(x)\cos(x)y' + y = \tan^2(x)$
14.- $(1 + \sin(x))y' + 2\cos(x)y = \tan(x)$
15.- $y' + 2xy = x$

Los siguientes ejercicios son extraidos del libro *Differential Equations* de Frank Ayres, Schaum Publishing, 1952. Página 39.

1.- $y' + y = 2 + 2x$
2.- $x\,dy - 2y\,dx = (x-2)e^x\,dx$
3.- $y\,dx + (xy + x - 3y))\,dy = 0$
4.- $dr + (2r\cot(\theta) + \sin(2\theta))d\theta$

5. Ecuación de Bernoulli

• Resuelva la ecuación logística considerándola como una ecuación de Bernoulli.
• El modelo SIS, es un modelo epidemiológico de propgación de una enfermedad infecciosa, el cual es descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{S} & = & -\beta\, SI + \gamma I \\ \dot{I} & = & \beta SI - \gamma I, \end{array} \right.$$

donde S es la fracción de *población susceptible* mientras que I es la fracción de *población infectada*. El parámetro $\beta > 0$ describe la intensidad del distanciamiento mientras que $\gamma > 0$ mide la velocidad de recuperación.

a) Demuestre que $S + I = 1$
b) Usando lo anterior demuestre que la ecuación diferencial que describe la evolución de infectados viene dada por:

$$\frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I - \beta I^2$$

c) Resuelva esta ecuación considerándola como ecuación de Bernoulli.
d) Analice $\lim_{t\to+\infty} I(t)$, considerando los casos $\beta < \gamma$ y $\beta > \gamma$.

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George F. Simmons. Mc Graw –Hill, Madrid 1993 (Página 61)

1.- $xy' + y = x^4y^3$
2.- $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$
3.- $x\,dy + y\,dx = xy^2\,dx$

6. Ecuaciones Exactas

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales* de H.B. Phillips. Editorial UTHEA, México, 1956. Página 52.

1.- $y\,dx + (x + y)\,dy = 0,$
2.- $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0,$
3.- $x(x - 2y)\,dx - y(y - 2x)\,dy = 0,$
4.- $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0,$
5.- $(r\cos^2(\theta) - \sin(\theta))\,dr - r\cos(\theta)(r\sin(\theta) + 1)\,d\theta = 0,$
6.- $(3x^2y - 2y^3)\,dx + (x^3 - 6xy^2)\,dy = 0,$
7.- $(3x^2y + 2x)\,dx + (x^3 - 1)\,dy,$
8.- $e^x(y^3 + xy^3 + 1)\,dx + 3y^2(xe^x - 6)\,dy = 0,$

9.- $(2xe^y + y^2e^x + 2x)\,dx + (x^2e^y + 2ye^x)\,dy = 0$,
10.- $y\,dx + (x-y)\,dy = 0$,

Los siguientes ejercicios son del libro *Ecuaciones Diferenciales* de Donald L. Kreider, Robert G. Kuller y Donald R. Ostberg. Fondo Educativo Interamericano, México, 1973, página 346.

1.- $2xy\,dx + (x^2+4y)\,dy = 0$,
2.- $y(y^2-3x^2)\,dx + x(3y^2-x^2)\,dy = 0$,
3.- $(3x^2+6xy-y^2)\,dx + (3x^2-2xy+3y^2)\,dy = 0$,
4.- $(5x^4-9x^2y^2+5y^3)\,dx + 2xy(10y^2-3x^2)\,dy = 0$,
5.- $\frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2} + \frac{1}{y}\,dy = 0$,
6.- $x^2\,dx + y^2\,dy + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$,
7.- $\frac{y\,dx-x\,dy}{xy} + \frac{x\,dy+y\,dx}{\sqrt{1+(xy)^2}} = 0$,
8.- $[1+\ln(xy)]\,dx + \left(1+\frac{x}{y}\right) = 0$,
9.- $\left[\ln(x-y) + \frac{x+y}{x-y}\right]\,dx + \left[\ln(x-y) - \frac{x+y}{x-y}\right]\,dy = 0$,
10.- $(ye^x + e^y)\,dx + (e^x + xe^y)\,dy = 0$.

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Differential Equations with Boundary–Value Problems* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 60–61.

Determine si las siguientes ecuaciones son exactas, si son exactas resuelvalas.

1.- $(2x+4)\,dx + (3y-1)\,dy = 0$,
2.- $(2x+y)\,dx - (x+6y)\,dy = 0$,
3.- $(5x+4y)\,dx + (4x-8y^3)) = 0$,
4.- $(\sin(y) - y\sin(x))\,dx + (\cos(x) + x\cos(y) - y)\,dy = 0$,
5.- $(2y^2x-3)\,dx + (2yx^2+4)\,dy = 0$,
6.- $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos(3x)\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y\sin(3x) = 0$,
7.- $(x+y)(x-y)\,dx + x(x-2y)\,dy = 0$,
8.- $\left(1+\ln(x)+\frac{y}{x}\right)\,dx = (1-\ln(x))\,dy$,
9.- $(y^3 - y^2\sin(x) - x)\,dx + (3xy^2 + 2y\cos(x))\,dy$,
10.- $(x^3+y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$.

7. Ecuaciones Reducibles a Exactas

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales elementales* de Earl D. Rainville. Editorial Trillas, México, 1973. Página 77.

1.- $(x^2+y^2+1)\,dx + x(x-2y)\,dy = 0$,
2.- $2y(x^2-y+x)\,dx + (x^2-2y)\,dy = 0$,
3.- $y(2x-y+1)\,dx + x(3x-4y+3)\,dy = 0$,
4.- $y(4x+y)\,dx - 2(x^2-y)\,dy = 0$,
5.- $(xy+1)\,dx + x(x+4y-2)\,dy = 0$,
6.- $(2y^2+3xy-2y+6x)\,dx + x(x+2y-1)\,dy = 0$,
7.- $y(y+2x-2)\,dx - 2(x+y)\,dy = 0$,
8.- $y^2\,dx + (3xy+y^2-1)\,dy = 0$,
9.- $2y(x+y+2)\,dx + (y^2-x^2-4x-1)\,dx = 0$,
10.- $2(2y^2+5xy-2y+4)\,dx + x(2x+2y-1)\,dy = 0$.

Transforme las siguientes ecuaciones diferenciales en ecuaciones exactas. En algunos casos, se pueden utilizar los resultados vistos en clases, en otros casos se entrega el factor integrante, que será definido como una función μ.

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Differential Equations with Boundary–Value Problems* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 62–63.

1.- $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$
2.- $-y^2dx + (x^2 + xy)dy = 0,\ \mu(x, y) = \frac{1}{x^2y}$
3.- $(-xy \sin x + 2y \cos x) + 2x \cos xdy = 0,\ \mu(x, y) = xy$
4.- $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$
5.- $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$
6.- $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0,\ \mu(x, y) = (x + y)^{-1}$

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George F. Simmons. Mc Graw –Hill, Madrid 1993 (Página 61)

1.- Demuestre que si existe una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{Ny - Mx}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) g(z)$$

donde $z = xy$, entonces $\mu(x, y) = e^{\int g(z)\,dz}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

2.- Resuelva las ecuaciones diferenciales encontrando un factor integrante
a) $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$
b) $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0,$
c) $x\,dy + y\,dx + 3x^3y^4\,dy = 0$
d) $e^x\,dx + (e^x \cot(y) + 2y \operatorname{cosec}(y))\,dy = 0$
e) $(x + 2)\sin(y)\,dx + x\cos(y)\,dy = 0$
f) $y\,dx + (x - 2x^2y^3)\,dy = 0$
g) $(x + 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
h) $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0$
i) $(y\ln(y) - 2xy)\,dx + (x + y)\,dy = 0$
j) $(y^2 + xy + 1)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy = 0$
k) $(x^3 + xy^3)\,dx + 3y^2\,dy = 0$

3.- Bajo que condiciones la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

tendrá un factor integrante de la forma $\mu(x + y)$?

8. La ecuación $y'' + Q(x)y' + P(x)y = 0$

1.- Si P y Q son funciones continuas en $[a, b]$ e $x \mapsto y(x)$ es una solución de

$$y'' + Q(x)y' + P(x)y = 0$$

tal que $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0)$ en algun $x_0 \in (a, b)$. Demuestre que $y(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

2.- Si P es continua y positiva en $[a,b]$, demuestre que si una solución $x \mapsto y(x)$ de la ecuacion diferencial
$$y'' + P(x)y = 0$$
verifica $y(x) > 0$ para todo $x \in (c,d) \subset [a,b]$, entonces $x \mapsto y(t)$ es concava en (c,d).

3.- Si P y Q son continuas en $[a,b]$ y Q es positiva en $[a,b]$ demuestre que toda solución $x \mapsto y(x)$ de la ecuacion
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$
con condición inicial $y(x_0) = U > 0$ e $y'(x_0) = 0$ tiene un mínimo relativo en x_0.

4.- Demuestre que $y_1(x) = \sin(e^x)$ e $y_2(x) = \cos(e^x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuacion
$$y'' - y' + e^{2x}y = 0$$

5.- Si Pes continua en $[a.b]$ entonces toda solución $x \mapsto y(x)$ de la ecuación
$$y'' + P(x)y = 0$$
verifica
$$\int_a^b \phi'(x)y'(x)\,dx = \int_a^b P(x)\phi(x)y(x)\,dx$$
para toda ϕ derivable que cumpla con la igualdad $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro de George Simmons *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*

1.- Use el Wrosnkiano para probar que dos soluciones de la ecuación diferencial
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$
sobre el intervalo $[a,b]$ son linealmente independientes si
  a) Tienen un cero común x_0 en el intervalo $[a,b]$.
  b) Tienen un máximo o mínimo relativo x_0 en el intervalo $[a,b]$.

2.- Considere las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2|x|$ definidas en el intervalo $[-1,1]$.
  a) Demuestre que $W(f,g)(x) = 0$ para todo $x \in [-1,1]$,
  b) Demuestre que f y g no son linealmente dependientes.
  c) Compare ese resultado con la pregunta anterior y los resultados vistos en clases.

3.- Demuestre que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$
entonces
$$P(x) = -\frac{y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x)}{W(y_1,y_2)(x)}$$
y
$$Q(x) = \frac{y_1'(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1''(x)}{W(y_1,y_2)(x)}.$$
  a) Si $y_1(x) = \cos(x)$ e $y_2(x) = \sin(x)$ son soluciones linealmente independientes de cierta ecuacion diferencial, determine cual es esa ecuación usando la pregunta anterior.

b) Idem para $y_1(x) = \sin(e^x)$ e $y_2(x) = \cos(e^x)$

9. Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

1.- $y'' + 2y' - 2y = 0$
2.- $8y'' + 14y' - 15y = 0$
3.- $3y'' - 5y' + 2y = 0$
4.- $y'' - 2y' = 0$
5.- $y'' + 4y = 0$
6.- $3y'' + 2y = 0$
7.- $y'' + 4y + 8y = 0$
8.- $4y'' - 4y' + 3y = 0$
9.- $y'' - 2y' + 2y = 0$
10.- $9y'' - 12y' + 4y = 0$.

Resuelva los siguentes problemas de Cauchy

1.- $2y'' - y' - 3y = 0$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = -7/2$
2.- $y'' - 8y' + 16y = 0$ con $y(0) = 1/2$ e $y'(0) = -1/3$
3.- $4y'' - 12y' + 9y = 0$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 7/2$
4.- $4y'' - 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 1/2$ e $y'(0) = 1$
5.- $y'' + y' + 13y = 0$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = -2$

Encuentre la ecuación lineal de la forma

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

cuya solución general sea

1.- $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$
2.- $c_1 e^x \sin(2x) + c_2 e^x \cos(2x)$
3.- $(c_1 + c_2 x)e^{-2x}$
4.- $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1.- $y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$
2.- $y'' - y' - 2y = e^{-x} \sin(x)$
3.- $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$
4.- $y'' + 3y' - 4y = x^2 e^x$
5.- $4y'' + 4y' + y = xe^{-x/2} \sin(x)$
6.- $y'' + 4y = \frac{e^{2x}}{2}$
7.- $y'' + 10y' - 12y = \frac{(e^{2x}+1)^2}{e^{2x}}$
8.- $y'' + 6y' + 9y = (x + 1)e^x$
9.- $y'' - 2y' + 2y = e^{2x} \sin(x)$
10.- $4y'' - 8y' + 5y = e^x \tan^2(x/2)$.

10. Transformada de Laplace

1.- Si $f, g \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ son funciones de orden exponencial y $a, b \in \mathbb{R}$, demuestre que $x \mapsto af(x) + bg(x)$ tambien es de orden exponencial.
2.- Demuestre que si $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial, entonces existe $c > 0$ y $g(x)$

$$\frac{|f(x)|}{x} \le g(x) + c$$

tal que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

3.- Demuestre que si $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es continua, de orden exponencial y $f(x+\omega) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{p\omega}} \int_0^{\omega} e^{-px} f(x)\,dx$$

4.- Demuestre que $f(x) = e^{e^x}$ no es de orden exponencial.

5.- Considere la funcion $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in [0,a]$ y $f(x) = 0$ para todo $x > a$. Encuentre $\mathcal{L}\{f(x)\}$.

6.- [Primer Teorema de Traslación] Si $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ cuando $p > \alpha$, demuestre que

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(p-a) \quad (p > a + \alpha)$$

7.- Si

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{p+5}{p^2+2p+5},$$

encuentre $f(x)$.

Los siguientes ejercicios son extraidos la página 219 del libro *Matemáticas Avanzadas para ingeniería* (Vol.I) de Erwin Kreyzig. Editorial Limusa, México, 1974.

Dada $\mathcal{L}\{f(x)\}$ encuentre $f(x)$, donde

1.- $\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \ldots + \frac{a_n}{p^n}$.

2.- $\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{2}{p+3}$

3.- $\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{p^2+4}$

4.- $\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{p}{p^2+\pi}$

5.- $\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{4-3p}{p^2}$

6.- $\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$ con $a \neq b$

Los siguientes ejercicios son extraidos la página 219 del libro *Matemáticas Avanzadas para ingeniería* (Vol.I) de Erwin Kreyzig. Editorial Limusa, México, 1974.

1.- Demuestre que

$$\mathcal{L}\{\cosh(ax)\cos(ax)\} = \frac{p^3}{p^4+4a^4}$$

2.- Demuestre que

$$\mathcal{L}\{\cosh(ax)\sin(ax)\} = \frac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}$$

3.- Demuestre que

$$\mathcal{L}\{\sinh(ax)\cos(ax)\} = \frac{a(p^2-2a^2)}{p^4+4a^4}$$

4.- Demuestre que

$$\mathcal{L}\{\sinh(ax)\sin(ax)\} = \frac{2a^2p}{p^4+4a^4}$$

Nuevo!!Los siguientes ejercicios son extraidos de la página 256 del libro *Matemáticas Avanzadas para ingeniería* (Vol.I) de Erwin Kreyzig. Editorial Limusa, México, 1974.

1.- Resuelva los problemas de Cauchy mediante el uso de la transformada de Laplace

a) $y'' + y = 0$, con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.
b) $4y'' + y = 0$, con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$.
c) $y'' + 25y = 0$, con $y(0) = -2$ e $y'(0) = 20$.
d) $y'' + 9y = 0$, con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
e) $y'' - 4y = 0$, con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.
f) $y'' - y = 0$, con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
g) $y'' - \pi^2 y = 0$, con $y(0) = -1$ e $y'(0) = \pi$.
h) $y'' + 2y' + 2y = 0$, con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
i) $y'' - 4y' + 5y = 0$, con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.
j) $y'' + 4y' + 5y = 0$, con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -4$.
k) $y'' - 2y' + 10y = 0$, con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 3$.

2.- Usando la transformada de Laplace, demuestre que el problema de Cauchy

$$y'' - a^2 y = 0 \quad \text{con } y(0) = k_1 \text{ e } y'(0) = k_2,$$

tiene como solución

$$y(x) = k_1 \cosh(ax) + \frac{k_2}{a} \sinh(ax).$$

Los siguientes ejercicios son extraidos de la página 260 del libro *Matemáticas Avanzadas para ingeniería* (Vol.I) de Erwin Kreyzig. Editorial Limusa, México, 1974.

Encuente $f(x)$ si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ es igual a

1.- $\frac{p+12}{p^2+4p}$
2.- $\frac{2p-6}{p^2-1}$
3.- $\frac{6p}{p^2+2p-8}$
4.- $\frac{p-3}{p^2-3p+2.5}$
5.- $\frac{6p^2+22p+18}{p^3+6p^2+11p+6}$
6.- $\frac{p^2-6p+4}{p^3-3p^2+2p}$
7.- $\frac{p^2-10p-25}{p^3-25p}$
8.- $\frac{2p^2+5p-1}{p^3-p}$
9.- $\frac{2p^4+p^3-10p^2+8p+8}{p(p^2-1)(p^2-4)}$
10.- $\frac{p+13}{p^2+p-6}$
11.- $\frac{4-p}{p(p^2+p-2)}$
12.- $\frac{5p^2+p-2}{p^3-p}$

Resuelva los siguientes problemas de Cauchy

13.- $y'' - 4y' + 3y = 0$ con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 7$
14.- $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$
15.- $y'' - y' - 2y = 7\sinh(3x) - 3\cosh(3x)$ con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 4$
16.- $y'' - 2y' - 3y = 4$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$
17.- $y'' - y' - 12y = -24e^x - 12$ con $y(0) = 5$ e $y'(0) = 3$
18.- $y'' + y' - 2y = 3\cos(3x) - 11\cos(3x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$

Los siguientes ejercicios son extraidos de las páginas 263–254 del libro *Matemáticas Avanzadas para ingeniería* (Vol.I) de Erwin Kreyzig. Editorial Limusa, México, 1974.

Encuentre $f(x)$ si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ es

1.- $\frac{6p-2}{p^2+9}$
2.- $\frac{1-p}{p^2+1}$
3.- $\frac{p^2+1}{p^3+4p}$
4.- $\frac{3p^2-2p-1}{(p-3)(p^2+1)}$
5.- $\frac{4p}{p^2-2p+2}$
6.- $\frac{3(p+1)}{p^2+4p+13}$
7.- $\frac{p-3}{p^2+2p+5}$
8.- $\frac{p}{p^2-2\pi p+2\pi^2}$
9.- $\frac{3p-7}{p^2-6p+10}$
10.- $\frac{p+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{p^2-2\sqrt{2}p+5}$

Resuelva los siguientes problemas de Cauchy usando la transformada de Laplace

11.- $y'' + y' - 2y = \sin(3x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
12.- $y'' - 2y'2y = 0$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.
13.- $y'' - 2y' + 2y = 2\cos(2x) - 4\sin(2x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
14.- $y'' - 2y' + 2y = 4\cos(2x) + 2\sin(2x)$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.
15.- $y'' + 4y' + 13y = 4\sin(x) - 12\cos(x)$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = -2$.