Ayudantia 13

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 14 de Octubre 2022

Ejercicio 13.1. Sea G un grupo. Sea I un conjunto no vacío totalmente ordenado. Sea $\{S_x\}_{x\in I}$ una familia de subgrupos de G que cumple la siguiente propiedad:
★ Si x, $y \in I$ tal que $x \leq y$, entonces $S_x \subset S_y$ (respectivamente $S_x \supset S_y$).
Demostrar que $\cup_{x\in I} S_x$ es un subgrupo de G.

Demostración. Denotemos por $H := \cup_{x\in I} S_x$.

1° Mostrar que $H \neq \emptyset$.

Como I es no vacío, existe un $y \in I$ que dejamos fijo. Luego, consideramos S_y. Dado que S_y es un subgrupo de G, tendremos que $id_G \in S_y$. Por lo tanto $id_G \in H$ y concluimos lo querido.

2° Mostrar que H es cerrado bajo la multiplicación.

Sean a, $b \in H$. Por definición de unión de conjuntos, deben existir y, $z \in I$ tal que $a \in S_y$ y $b \in S_z$. Como I es totalmente ordenado y a y b son arbitrarios, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y \leq z$. Luego, por ★, obtenemos que $S_y \subset S_z$ (resp. $S_y \supset S_z$). Luego, a, $b \in S_z$ (resp. a, $b \in S_y$). Y dado que S_z (resp. S_y) es un subgrupo de G, obtendremos que $ab \in S_z$ (resp. $ab \in S_y$). Por lo tanto $ab \in H$ y concluimos lo pedido.

3° Mostrar que H es cerrado bajo inversos.

Sea $a \in H$. Por defínción de unión de conjuntos, existe $y \in I$ tal que $a \in S_y$. Como S_y es un subgrupo de G, tendremos que $a^{-1} \in S_y$. Luego, $a^{-1} \in H$ y concluimos lo querido.

Dado 1°, 2° y 3° Deducimos que H es un subgrupo de G. □

Ejercicio 13.2. Consideremos el grupo $(\mathbb{Z}, +)$. Sea $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un homomorfismo de grupos tal que $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ para todo a, $b \in \mathbb{Z}$, donde $\cdot$ es la multiplicación usual de los números enteros. ¿Que podemos decir de φ?

Demostración. Demostraremos que φ o es la función trivial o es la función identidad. Para esto demostraremos que la función trivial y la identidad podrían perfectamente ser φ. Luego supondremos que φ no es la función trivial y llegaremos a que debe ser la identidad, o sea, solo hay dos funciones que satisfacen las propiedades de φ.

1° La función trivial satisface las propiedades de φ.

Denotemos por $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 0$ a la función trivial.

Dado que f se puede evaluar en todo su dominio, su recorrido está contenido en el codominio y $f(a) = 0 = f(b)$ para todo a, $b \in \mathbb{Z}$; deducimos que está bien definida. Como $f(a + b) = 0 = 0 + 0 = f(a) + f(b)$ para todo a, $b \in \mathbb{Z}$, se tiene que además es un homomorfismo de grupos. Por último notemos que $f(ab) = 0 = 0 \cdot 0 = f(a)f(b)$ para todo a, $b \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, φ podría ser el homomorfismo trivial.

2° La función identidad satisface las propiedades de φ.

Denotemos por $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x$ a la función identidad.

Ya sabemos que g es un homomorfismo de grupos, pero además notemos que $g(ab) = ab = g(a)g(b)$ para todo a, $b \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, φ podría ser el homomorfismo identidad.

3° Supongamos que φ no es el homomorfismo trivial. Demostraremos que debe ser la identidad.
Por hipótesis existe $x_0 \in \mathbb{Z}$ (el cual fijaremos) tal que $\varphi(x_0) \neq 0$. Además tenemos que $\varphi(x_0) = \varphi(x_0 \cdot 1) = \varphi(x_0)\varphi(1)$, o sea, $\varphi(x_0) = \varphi(x_0)\varphi(1) =$. Luego, $\varphi(1) = 1$.
Como φ es un homomorfismo, también tendremos que $varphi(-1) = -1$ y que $\varphi(0) = 0$.
Ahora, sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ arbitrario. Denotamos por el signo de n a $t := \frac{n}{|n|}$. Notemos que $t \in \{1, -1\}$, por lo tanto $\varphi(t) = t$. Por último tenemos que $n = |n| \cdot t = \underbrace{t + \cdots + t}_{|n|}$. Así tendremos que $\varphi(n) = \varphi(\underbrace{t + \cdots + t}_{|n|}) = \underbrace{\varphi(t) + \cdots + \varphi(t)}_{|n|} = \underbrace{t + \cdots + t}_{|n|} = n$.
Concluimos que $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto es la función identidad.

De 1°, 2° y 3° deducimos que o bien φ es trivial o bien φ es la identidad, pero no hay otra opción.

□

Ejercicio 13.3. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) $ca = cb \Longrightarrow a = b, \ \forall (a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) $ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Comentario: Para hacer de esto un ejercicio, debemos olvidarnos de muchas cosas que sabemos de los números enteros. Pero es más fácil decir las cosas que si podemos ocupar en la demostración: $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano, la multiplicación usual se distribuye en la suma usual, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, la multiplicación es asociativa y la multiplicación es conmutativa.

Lema 1. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Notemos que $a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Luego, restando $a \cdot 0$ en ambos lados obtenemos que $a \cdot 0 = 0$. □

Lema 2. $c(-a) = -ca$ para todo $a, c \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sean $a, c \in \mathbb{Z}$ arbitrarios. Del Lema 1. tenemos que $c0 = 0$. Luego, $0 = c0 = c(a + (-a)) = ca + c(-a)$. Por lo tanto $c(-a)$ es el inverso aditivo de ca, pero como el inverso es único conluimos que $c(-a) = -ca$. □

Ahora si estamos listos para probar el ejercicio 13.3.

Demostración. Para probar que dos condiciones son equivalentes, debemos asumir que se cumple una y demostrar que la otra necesariamente se debe cumplir.

a) $\Rightarrow$ b). Estamos asumiendo la condición a), demostraremos que también se cumple la condición b).
Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $ab = 0$ y $b = 0$ se cumple b). Ahora, si $ab = 0$ y $b \neq 0$, demostraremos que $a = 0$ y por lo tanto se cumple b).
Por el Lema 1. tenemos que $0 = b0$. Por conmutatividad en la multiplicación tenemos que $ab = ba$. Luego, obtenemos que $ba = b0$. Como $b \neq 0$ y asumimos a), tendremos que $a = 0$.
Concluimos que si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$, por lo tanto el hecho de haber asumido a) implica que b) también es cierto.

b) $\Rightarrow$ a). Estamos asumiendo la condición b), demostraremos que también se cumple la condición a).

Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$ y $c \neq 0$. Si $ca = cb$ tendremos que $ca + (-cb) = 0$. Del Lema 2. llegamos a que $ca + c(-b) = 0$. Como podemos distribuir la multiplicación en la suma, obtenemos que $c(a - b) = 0$. Y finalmente, como $c \neq 0$ y asumimos b), deducimos que $a - b = 0$. O sea, $a = b$. Concluimos que si $ca = cb$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$, por lo tanto el hecho de haber asumido b) implica que a) también es cierto.

En retrospectiva, tenemos que a) es cierto si y solo si b) es cierto, es decir, son equivalentes. $\square$

Ejercicio 13.4. Consideremos el grupo $(\mathbb{C}, +)$. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de grupos tal que $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ para todo a, $b \in \mathbb{C}$, donde $\cdot$ es la multiplicación usual de los números complejos. ¿Que podemos decir de φ?

Demostración. Queda de ejercicio para quien esté leyendo demostrar que φ podría perfectamente ser la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto 0$, es decir, la función trivial. Ayuda: ver el ejercicio 13.2.

De ahora en adelante supondremos que φ no es la función trivial, demostraremos que es inyectiva y que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
Como φ no es la función trivial, esto quiere decir que existe $x_0 \in \mathbb{C}$ (el cual fijaremos) tal que $\varphi(x_0) \neq 0$.

1° Preserva los racionales.
Tenemos que $\varphi(x_0) = \varphi(x_0 \cdot 1) = \varphi(x_0)\varphi(1)$. Como $\varphi(x_0)$ es distinto a 0, podemos dividir y obtener que $\varphi(1) = 1$. Ahora, por la misma demostración en 3° del ejercicio 13.2., podemos decir que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, *mutatis mutandis.*
Antes de seguir notemos que si $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $1 = \varphi(1) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1})$. Como estamos trabajando en los complejos, obtenemos que $(\varphi(x))^{-1} = \varphi(x^{-1})$.
Siguiendo en lo que estabamos, si $x \in \mathbb{Q}$ entonces lo podemos escribir como $x = \frac{p}{q}$, donde p, $q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. Así tendremos que $\varphi(x) = \varphi(\frac{p}{q}) = \varphi(p \cdot q^{-1}) = \varphi(p)\varphi(q^{-1}) = \varphi(p)(\varphi(q))^{-1} = p(q)^{-1} = \frac{p}{q} = x$. Luego, $\varphi(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, que es lo que queríamos probar.

2° Inyectividad.
Ya demostramos que $(\varphi(x))^{-1} = \varphi(x^{-1})$ para todo $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Si existe $x_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(x_1) = 0$. Entonces $0^{-1} = (\varphi(x_1))^{-1} = \varphi(x_1^{-1}) \in \mathbb{C}$, lo que es una contradicción por todas partes. Y deducimos que $Ker\varphi = \{0\}$, por lo tanto tenemos nuestra inyectividad de φ. $\square$

Comentario: En el ejercicio 13.4., podemos decir que φ solo puede ser tres funciones, el homomorfismo trivial y dos automorfismos. Pero para demostrar de manera algebraica que no hay otras opciones, necesitamos un poquitín de teoría de anillos.