

Ayudantia 12

Profesor: Cristóbal Rivas

Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 30 de Septiembre 2022

Problema 12.0. Sea G un grupo. Sean N, H subgrupos de G . Demostrar que si N es normal en G , entonces $NH := \{nh \mid n \in N \text{ y } h \in H\}$ es un subgrupo de G .

Demostración. 1° Demostremos que es distinto de vacío. Como $id_G \in N \cap H$ ya que cada uno es un subgrupo, tendremos que $id_G = id_G id_G \in NH$. Se sigue que $NH \neq \emptyset$.

2° Demostraremos que es cerrado bajo la multiplicación. Sean $x, y \in NH$, existen $n_1, n_2 \in N$ y $h_1, h_2 \in H$ tal que $x = n_1 h_1$ y $y = n_2 h_2$. Primero cabe destacar que como N es normal en G , entonces $n_3 := h_1 n_1 h_1^{-1} \in N$, algo que ocuparemos más tarde. Además, como N y H son subgrupos, entonces denotamos $h_3 := h_1 h_2 \in H$ y $n_4 := n_1 n_3 \in N$. Así tendremos una columna de igualdades, con un comentario a la derecha de cada igualdad, sobre porque son equivalentes.

$$\begin{aligned} xy &= (n_1 h_1)(n_2 h_2) \text{ Por como denotamos } x \text{ e } y. \\ &= n_1(h_1[(n_2 id_G)h_2]) \text{ Por asociatividad y definición del neutro.} \\ &= n_1(h_1[(n_2[h_1^{-1}h_1])h_2]) \text{ Por definición del inverso.} \\ &= [n_1(h_1 n_2 h_1^{-1})][h_1 h_2] \text{ De nuevo asociatividad.} \\ &= [n_1 n_3][h_3] \text{ Por como definimos } n_3 \text{ y } h_3. \\ &= n_4 h_3 \in NH \text{ Por como definimos } n_4 \text{ y la definición de } NH. \end{aligned}$$

Deduciendo que NH es cerrado bajo multiplicación, ya que $xy \in NH$ para todo $x, y \in NH$.

3° Demostraremos que es cerrado bajo inverso. Sea $x \in NH$, deberán existir $n \in N$ y $h \in H$ tal que $x = nh$. Antes de seguir, notemos que.

$$x(h^{-1}n^{-1}) = (nh)(h^{-1}n^{-1}) = n[(hh^{-1})n^{-1}] = n[id_G n^{-1}] = nn^{-1} = id_G$$

Por unicidad del inverso, tendremos que $x^{-1} = h^{-1}n^{-1}$.

Como N es normal G , obtenemos que $h^{-1}N = Nh^{-1}$ por definición. Luego, como $n^{-1} \in N$ por ser subgrupo, entonces existe $m \in N$ tal que $h^{-1}n^{-1} = mh^{-1}$. Recordando que H es un subgrupo y por lo tanto $h^{-1} \in H$, llegamos a lo siguiente.

$$x^{-1} = h^{-1}n^{-1} = mh^{-1} \in NH \text{ Esto último ya que } m \in N \text{ y } h^{-1} \in H$$

Deduciendo que NH es cerrado bajo inversos. Ya que para todo $x \in NH$ tendremos que $x^{-1} \in NH$.

Concluimos que NH es un subgrupo de G . □

Problema 12.1. Calcular los siguientes subgrupos del grupo G .

a) $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$, donde $G = (\mathbb{Z}, +)$.

Demostración. Como $-2 \in 2\mathbb{Z}$ y $3 \in 3\mathbb{Z}$. Tendremos que $1 = (-2) + 3 \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$. Luego, como $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ es un subgrupo de G (porque en un grupo abeliano todos sus subgrupos son normales), es cerrado bajo la suma y bajo inversos. Como todo entero se puede expresar como suma de unos, menos unos y uno menos uno (este último en caso del cero); deducimos que $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. $\square$

b) GG .

Demostración. Recordemos la definición de nuestro conjunto.

$$GG := \{g_1g_2 \mid g_1, g_2 \in G\}$$

Como G es un grupo, tendremos que $GG \subset G$. Además, tendremos que existe $id_G \in G$. Luego, para todo $g \in G$ se cumplirá que $g = gid_G \in GG$. Deduciendo que $G \subset GG$ y por lo tanto $GG = G$. $\square$

c) $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$, donde $G = (\mathbb{Z}, +)$.

Demostración. Como $-4 \in 4\mathbb{Z}$ y $6 \in 6\mathbb{Z}$. Tendremos que $2 = (-4) + 6 \in 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$. Luego, como $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$ es un subgrupo de G (porque en un grupo abeliano todos sus subgrupos son normales), es cerrado bajo la suma y bajo inversos. Como todo múltiplo de dos se puede expresar como suma de 2's, -2's y 2-2 (este último en caso del cero); deducimos que $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z}$.

Ahora, sea $x \in 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$. Existen $m \in 4\mathbb{Z}$ y $n \in 6\mathbb{Z}$ tal que $x = m + n$. Además existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 4a$ y $n = 6b$. Obteniendo que $x = 4a + 6b = 2(2a + 3b)$, lo que significa que $x \in 2\mathbb{Z}$. Como era un elemento cualquiera de $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$, deducimos que $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$.

Concluimos que $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. $\square$

d) $A_n\{(1), (12)\}$, donde $G = (S_n, \circ)$ y $n \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Demostración. Recordemos primero que $(12) \notin S_n$ y $(1) \in A_n$. Luego, $A_n(12) \neq A_n(1)$. Además recordemos que $[S_n : A_n] = 2$, por lo que S_n está particionado en las dos clases laterales de A_n . Por el principio, tenemos que las dos clases laterales se pueden escribir como $A_n(1)$ y $A_n(12)$.

Luego, si $x \in S_n$. Tendremos que $x \in A_n(1)$ o $x \in A_n(12)$. En cualquiera de los dos casos, $x = ab$, donde $a \in A_n$ y $b \in \{(1), (12)\}$. Deducimos que $x \in A_n\{(1), (12)\}$. Ahora bien, como x era un elemento cualquiera de S_n , deducimos que $A_n\{(1), (12)\} \supset S_n$. A parte, por definición de multiplicar conjuntos sabemos que $A_n\{(1), (12)\} \subset S_n$, ya que este último es un grupo. Concluimos que $A_n\{(1), (12)\} = S_n$. $\square$

e) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$; donde $G = (\mathbb{Z}, +)$, $n, m \in \mathbb{Z}$ y $MCD(n, m) = 1$.

Demostración. Dado que $MCD(n, m) = 1$, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = sn + tm$. Como $sn \in n\mathbb{Z}$ y $tm \in m\mathbb{Z}$, deducimos que $1 \in n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$. Luego, al igual que en problema 12.1. a), $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. $\square$

f) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$, donde $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $n, m \in \mathbb{Z}$.

Este ejercicio se deja propuesto a cada estudiantes. Ayuda: ver la solución del problema 12.1. a), c) y e).

g) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$, donde $G = (\mathbb{Z}, +)$.

Demostración. Si $x \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$, tendremos que $x \in 2\mathbb{Z}$ y $x \in 3\mathbb{Z}$. Luego, dos divide a x y tres divide a x . Luego, $6 = MCM(2, 3)$ divide a x . Lo que significa que $x \in 6\mathbb{Z}$. Como era un elemento cualquiera de nuestro conjunto, deducimos que $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$.

Si $x \in 6\mathbb{Z}$, tendremos que seis divide a x . Luego, dos divide a x y tres divide a x . Luego, $x \in 2\mathbb{Z}$ y $x \in 3\mathbb{Z}$. Luego, $x \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$. Como era un elemento cualquiera del conjunto, deducimos que $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \supset 6\mathbb{Z}$.

Concluimos que $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$. $\square$

h) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$, donde $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $n, m \in \mathbb{Z}$.

Demostración. 1° Veamos el caso para cuando $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Si $x \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$, tendremos que $x \in n\mathbb{Z}$ y $x \in m\mathbb{Z}$. Luego, n divide a x y m divide a x . Luego, $a = MCM(n, m)$ divide a x . Lo que significa que $x \in a\mathbb{Z}$. Como era un elemento cualquiera de nuestro conjunto, deducimos que $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$.

Si $x \in a\mathbb{Z}$, tendremos que $MCM(n, m)$ divide a x . Luego, n divide a x y m divide a x . Luego, $x \in n\mathbb{Z}$ y $x \in m\mathbb{Z}$. Luego, $x \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$. Como era un elemento cualquiera del conjunto, deducimos que $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \supset a\mathbb{Z}$.

Concluimos que $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} = MCM(n, m)\mathbb{Z}$.

Notemos que en este caso $\{0\} \subsetneq MCM(n, m)\mathbb{Z}$. Ya que por definición $MCM(n, m) > 0$, por lo tanto $MCM(n, m) \in MCM(n, m)\mathbb{Z}$ y $MCM(n, m) \notin \{0\}$.

2° Si $n = 0$ o $m = 0$, debemos recordar que $0\mathbb{Z} = \{0\}$. Además, tenemos que $0 \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ por ser cada uno un subgrupo. Luego, $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \{0\} = 0\mathbb{Z}$. $\square$

Problema 12.2. Sea G un grupo, determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) Consideremos $G = (\mathbb{Z}, +)$, entonces existen dos subgrupos no triviales (distintos de G y de $\{id_G\}$) $N, H \leq G$ tal que $G \cong N \rtimes H$.

Demostración. Afirmamos que el enunciado es falso. Demostraremos nuestra afirmación, mostrando que uno de los subgrupos debe ser trivial.

Supongamos que existen $N, H \leq G$ tal que $G \cong N \rtimes H$. Como N y H son subgrupos, en particular son grupos tal que $G \cong N \rtimes H$. Del problema 12.4., deducimos que existen dos subgrupos I y J de $\mathbb{Z}$, que en particular, cumplen que $I \cap J = \{0\}$ y $I + J = \mathbb{Z}$.

De la ayudantía uno, sabemos que $I = n\mathbb{Z}$ y $J = m\mathbb{Z}$ para algún $n, m \in \mathbb{Z}$. Del problema 12.1. h), como $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \{0\}$, de manera obligatoria tendremos que $n = 0$ o $m = 0$.

Nos percatamos que $\{0\} + K := \{0 + k \mid k \in K\} = \{k \mid k \in K\} =: K$ para todo subgrupo K de $\mathbb{Z}$. Luego, como $\mathbb{Z} = I + J = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ y $n = 0$ o $m = 0$, tendremos que $[n = 0 \text{ y } m = 1]$ o $[n = 1 \text{ y } m = 0]$ (recordar que $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$).

Como ni a I ni a J le asignamos alguna propiedad exclusiva, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I = \mathbb{Z}$ y $J = \{0\}$.

Antes de seguir denotemos por $\psi : N \rtimes H \rightarrow \mathbb{Z}$ a un isomorfismo entre los grupos. De nuevo invocamos el problema 12.4., que dada su demostración, tenemos que $J = \psi(N \times \{id_G\})$ o $J = \psi(\{id_G\} \times H)$. Luego, $\{0\} = \psi(N \times \{id_G\})$ o $\{0\} = \psi(\{id_G\} \times H)$. Luego, $(N \times \{id_G\}) \subset Ker\psi$ o $(\{id_G\} \times H) \subset Ker\psi$. Dado que ψ es en particular inyectiva,

$\text{Ker}\psi = \{(id_G, id_G)\}$, y por lo tanto $(N \times \{id_G\}) \subset \{(id_G, id_G)\}$ o $(\{id_G\} \times H) \subset \{(id_G, id_G)\}$. Luego, $N = \{id_G\}$ o $H = \{id_G\}$. Que era lo que queríamos mostrar. $\square$

- b) Consideremos $G = (S_n, \circ)$, entonces existen dos subgrupos no triviales $N, H \leq G$ tal que $G \cong N \rtimes H$.

Demostración. Afirmamos que el enunciado es verdadero. Demostraremos nuestra afirmación con un ejemplo.

Denotemos $N := A_n$ y $H := \{(1), (1\ 2)\}$. Ya sabemos de antemano que $N \triangleleft S_n$. Además, por el problema 12.1. d), tenemos que $NH = S_n$. Y como $(1\ 2) \notin A_n$, deducimos que $N \cap H = \{(1)\}$. Luego, por el problema 4 de la ayudantía 9, tenemos que $S_n = NH \cong N \rtimes H$, que era lo que queríamos mostrar. $\square$

Problema 12.3. Sean G_1, G_2 grupos y $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ un isomorfismo. Sean $A, D \leq G_1$ y $B \leq G_2$, demostrar.

- a) Existen $C \leq G_2$ y $F \leq G_1$ tal que $A \cong C$ y $B \cong F$.

Demostración. Denotemos por $C := \psi(A) := \{\psi(a) \in G_2 \mid a \in A\}$ y $F := \psi^{-1}(B) := \{x \in G_1 \mid \psi(x) \in B\}$. Por su definición sabemos que $C \leq G_2$ y $F \leq G_1$ (ver proposición 1.17. de los apuntes de la clase y ejercicio 0.3. del control 2 solucionado), nos falta demostrar lo otro.

1° $A \cong C$. Consideramos la restricción de ψ a A con su imagen de A , o sea, definimos $\psi|_A : A \rightarrow \psi(A) = C, x \mapsto \psi(x)$. Mostraremos que $\psi|_A$ es un isomorfismo.

Primero notemos que está bien definida. Ya que A, C son grupos y su regla de asignación es la de una función ya existente que toma valores de A y los deja en su imagen.

Notemos que es sobreyectiva. Si $x \in C$, tendremos que $x \in \psi(A)$. Luego, existe $y \in A$ tal que $\psi(y) = x$. Pero como $y \in A$, tenemos que $\psi(y) = \psi|_A(y)$. Luego, para todo $x \in C$ existe $y \in A$ tal que $\psi|_A(y) = x$.

Para la inyectividad, asumiremos que es un homomorfismo. Debemos notar que si $\psi|_A(x) = id_{\psi(A)} = id_{G_2}$, entonces $\psi(x) = id_{G_2}$. Luego, $\text{Ker}\psi|_A \subset \text{Ker}\psi = \{id_{G_1}\} = \{id_A\}$ (esto último ya que ψ es inyectiva); como además $id_A \in \text{Ker}\psi|_A$, tenemos que $\text{Ker}\psi|_A = \{id_A\}$ y por lo tanto $\psi|_A$ es inyectiva.

Finalmente demostraremos que es un homomorfismo. Sean $x, y \in A$, tendremos que $\psi|_A(xy) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = \psi|_A(x)\psi|_A(y)$ y por lo tanto es un homomorfismo. Cabe destacar que $\psi|_A(xy)$ está bien definido ya que $xy \in A$ por ser este último un grupo.

Dado que $\psi|_A$ es un isomorfismo ente A y C , concluimos que $A \cong C$.

2° $B \cong F$. Recordemos que al ser $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ un isomorfismo, entonces $\psi^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ es también un isomorfismo. Entonces consideramos $\psi^{-1}|_B : B \rightarrow \psi^{-1}(B) = F, x \mapsto \psi^{-1}(x)$. Nos percatamos que la demostración de 2° es similar a la de 1° y *mutatis mutandis*. $\square$

- b) $A \cap D \cong \psi(A) \cap \psi(D)$.

Demostración. Del problema 12.3. a), tenemos que $A \cap D \cong \psi(A \cap D)$. Por lo que demostraremos que $\psi(A \cap D) = \psi(A) \cap \psi(D)$. Esto lo demostraremos por doble inclusión.

1° $\subseteq$. Si $x \in \psi(A \cap D)$, entonces existe $y \in A \cap D$ tal que $\psi(y) = x$. Luego, existe $y \in A$ tal que $\psi(y) = x$, lo que significa que $x \in \psi(A)$. Además, existe $y \in D$ tal que $\psi(y) = x$, lo que significa que $x \in \psi(D)$. Luego, $x \in \psi(A) \cap \psi(D)$.

Como x era un elemento cualquiera, deducimos que $\psi(A \cap D) \subset \psi(A) \cap \psi(D)$.

2° $\supseteq$. Si $x \in \psi(A) \cap \psi(D)$, entonces $x \in \psi(A)$ y $x \in \psi(D)$. Lo primero significa que existe $a \in A$ tal que $\psi(a) = x$. Lo segundo significa que existe $d \in D$ tal que $\psi(d) = x$. Tenemos que $\psi(a) = x = \psi(d)$, y como ψ es inyectiva obtenemos que $a = d$. Luego, denotamos $g := a$, y obtenemos que existe $g = a \in A$ y $g = a = d \in D$ tal que $\psi(g) = x$. O sea, existe $g \in A \cap D$ tal que $\psi(g) = x$. Por lo tanto $x \in \psi(A \cap D)$. Como x era un elemento cualquiera, deducimos que $\psi(A \cap D) \supset \psi(A) \cap \psi(D)$.

Concluimos que $\psi(A \cap D) = \psi(A) \cap \psi(D)$, lo que acaba la demostración. $\square$

c) Si $A \triangleleft G_1$ entonces $\psi(A) \triangleleft G_2$.

Demostración. Como A es normal en G_1 , tenemos que $g_1 a g_1^{-1} \in A$ para todo $a \in A$ y $g_1 \in G_1$. Luego, por definición de $\psi(A)$ podemos decir que $\psi(g_1 a g_1^{-1}) \in \psi(A)$ para todo $a \in A$ y $g_1 \in G_1$. Dado que ψ es un homomorfismo, lo anterior es equivalente a decir que $\psi(g_1) \psi(a) \psi(g_1^{-1}) \in \psi(A)$ para todo $a \in A$ y $g_1 \in G_1$. Dado que ψ es sobreyectiva, obtenemos que $g_2 \psi(a) g_2^{-1} \in \psi(A)$ para todo $a \in A$ y $g_2 \in G_2$. De nuevo por la definición de $\psi(A)$, podemos decir que $g_2 c g_2^{-1} \in \psi(A)$ para todo $c \in \psi(A)$ y $g_2 \in G_2$. Lo que significa que $\psi(A)$ es normal en G_2 . $\square$

d) Si A es normal en G_1 , entonces $AD \cong \psi(A)\psi(D)$.

Demostración. Como A es normal en G_1 , por el problema 12.0. tendremos que AD es un subgrupo de G_1 . Por el problema 12.3. c), tendremos que $\psi(A)$ es normal en G_2 y por lo tanto $\psi(A)\psi(D)$ también es un subgrupo de G_2 .

Del problema 12.3. a), tenemos que $AD \cong \psi(AD)$. Por lo que demostraremos que $\psi(AD) = \psi(A)\psi(D)$. Esto lo demostraremos por doble inclusión mediante equivalencias.

Por definición de la imagen de un conjunto, $x \in \psi(AD)$ si y solo si existe $z \in AD$ tal que $\psi(z) = x$. Por definición de multiplicar conjuntos, esto último sucede si y solo si existen $a \in A$ y $d \in D$ tal que $\psi(ad) = x$. Dado que ψ es un homomorfismo, lo anterior ocurre si y solo si $\psi(a)\psi(d) = x$. De nuevo por la definición de imagen de un conjunto, lo último pasa si y solo si existen $y \in \psi(A)$ y $w \in \psi(D)$ tal que $yw = x$. Que por definición de multiplicar conjuntos, lo anterior ocurre si y solo si $x \in \psi(A)\psi(D)$.

En retrospectiva, $x \in \psi(AD)$ si y solo si $x \in \psi(A)\psi(D)$. Concluimos que $\psi(AD) = \psi(A)\psi(D)$, lo que acaba la demostración. $\square$

e) Si G_1 es cíclico, entonces G_2 es cíclico.

Demostración. Si G_1 es cíclico, entonces podemos fijar un $g \in G_1$ tal que $G_1 = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Ahora, como ψ es sobreyectiva; para todo $x \in G_2$, existe $y \in G_1$ tal que $\psi(y) = x$. Además, existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n = y$. Luego, $\psi(g^n) = x$. Como ψ es un homomorfismo, tendremos que $\psi(g)^n = x$. Como x es un elemento cualquiera de G_2 , deducimos que $G_2 = \{\psi(g)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Concluimos que G_2 es cíclico. $\square$

f) G_1 es abeliano si y solo si G_2 es abeliano.

Demostración. ($\Rightarrow$). Si G_1 es abeliano, entonces $xy = yx$ para todo $x, y \in G_1$. Luego, $\psi(xy) = \psi(yx)$ para todo $x, y \in G_1$. Dado que ψ es un homomorfismo, tendremos que $\psi(x)\psi(y) = \psi(y)\psi(x)$ para todo $x, y \in G_1$. Como ψ es sobreyectiva, obtenemos que

$zw = wz$ para todo $z, w \in G_2$ (tomando $z = \psi(x)$ y $w = \psi(y)$). Y concluimos que G_2 es abeliano.

($\Leftarrow$). Si G_2 es abeliano, entonces $zw = wz$ para todo $z, w \in G_2$. En particular, tendremos que $\psi(x)\psi(y) = \psi(y)\psi(x)$ para todo $x, y \in G_1$ (tomando $z = \psi(x)$ y $w = \psi(y)$). Dado que ψ es un homomorfismo, tendremos que $\psi(xy) = \psi(yx)$ para todo $x, y \in G_1$. Como ψ es inyectiva, obtenemos que $xy = yx$ para todo $x, y \in G_1$. Y concluimos que G_1 es abeliano. $\square$

g) $\psi^{-1}(\psi(A)) = A$. $\psi(\psi^{-1}(B)) = B$.

Demostración. 1° En (1), aplicamos la definición de la imagen inversa de $\psi(A)$. En (2), utilizamos el hecho de que $\psi(x) \in \psi(A)$ si y solo si $\psi(x) = \psi(a)$ para algún $a \in A$; luego, como ψ es inyectiva, tendremos que lo anterior pasa si y solo si $x = a \in A$ (así es, acabamos de mostrar que $\psi(x) \in \psi(A)$ si y solo si $x \in A$, este hecho ocupamos en (2)). Y en (3) nos percatamos que precisamente el conjunto descrito anteriormente es A . Obteniendo la igualdad buscada.

$$\psi^{-1}(\psi(A)) = \{x \in G_1 \mid \psi(x) \in \psi(A)\} \quad (1)$$

$$= \{x \in G_1 \mid x \in A\} \quad (2)$$

$$= A \quad (3)$$

2° En (4), aplicamos la definición de la imagen de $\psi^{-1}(B)$. En (5), aplicamos la definición de la imagen inversa de B . En (6), utilizamos el hecho de que ψ es sobreyectiva. En (7), nos percatamos que precisamente el conjunto descrito anteriormente es B . Obteniendo la igualdad buscada.

$$\psi(\psi^{-1}(B)) = \{\psi(x) \in G_2 \mid x \in \psi^{-1}(B)\} \quad (4)$$

$$= \{\psi(x) \in G_2 \mid \psi(x) \in B\} \quad (5)$$

$$= \{y \in G_2 \mid y \in B\} \quad (6)$$

$$= B \quad (7)$$

$\square$

Comentario: Para esta última demostración se le pide atención a quien lea. Esto ya que para decir que dos conjuntos son iguales, debemos asegurarnos de que cada uno esté contenido en el otro, o sea haya doble contención. No siempre es así, pero es una buena manera de practicar.

Desafío: En todas las demostraciones anteriores, tuvimos principalmente de hipótesis que había un isomorfismo. Aun así, varias demostraciones no ocupan ese hecho, y podrían demostrarse con hipótesis más débiles. A cada estudiante se le deja el reto de encontrar las hipótesis más débiles con las que se pueden demostrar cada ítem. Cada ítem podría requerir hipótesis diferentes.

Problema 12.4. Sean G, K y T grupos. Si $G \cong K \rtimes_{\varphi} T$; entonces existen $N, H \leq G$ tal que $N \triangleleft G$, $N \cap H = \{id_G\}$ y $NH = G$.

Demostración. Denotamos por $G' := K \rtimes_{\varphi} T$, $K' := K \times \{id_T\} := \{(k, id_T) \in G' \mid k \in K\}$ y $T' := \{id_K\} \times T := \{(id_K, t) \in G' \mid t \in T\}$. Primero demostraremos que; K' y T' son subgrupos de G' , K' es normal en G' , $K' \cap T' = \{id_{G'}\}$ y $G' = K'T'$.

1° Demostremos que son subgrupos. Como K y T son grupos, son no vacíos, por lo tanto K' y T' son no vacíos.

Sean $(k_1, id_T), (k_2, id_T) \in K'$ cualesquiera y $(id_K, t_1), (id_K, t_2) \in T'$ cualesquiera. Notemos que $(k_1, id_T)(k_2, id_T) = (k_1\varphi_{id_T}(k_2), id_T) \in K'$ y $(id_K, t_1)(id_K, t_2) = (id_K\varphi_{t_1}(id_K), t_1t_2) = (id_K, t_1t_2) \in T'$. Luego, K' y T' son cerrados bajo la multiplicación.

Sean $(k, id_T) \in K'$ y $(id_K, t) \in T'$ cualesquiera. Quien esté leyendo podrá comprobar en su casa que sus respectivos inversos son $(k^{-1}, id_T) \in K'$ y $(id_K, t^{-1}) \in T'$. Luego, K' y T' son cerrados bajo inversos.

Concluimos que K' y T' son subgrupos de G' . ✓

2° Demostremos normalidad. Sea $(k_1, t_1) \in G'$ cualquiera, un calcurilijillo nos dice que su inverso es $(\varphi_{t_1}^{-1}(k_1^{-1}), t_1^{-1})$. Ahora, sea $(k, id_T) \in K'$. Calculamos.

$$\begin{aligned} (k_1, t_1)(k, id_T)(\varphi_{t_1}^{-1}(k_1^{-1}), t_1^{-1}) &= (k_1\varphi_{t_1}(k), t_1)(\varphi_{t_1}^{-1}(k_1^{-1}), t_1^{-1}) \\ &= (k_1\varphi_{t_1}(k)\varphi_{t_1}(\varphi_{t_1}^{-1}(k_1^{-1})), t_1t_1^{-1}) \\ &= (k_1\varphi_{t_1}(k)\varphi_{t_1}(\varphi_{t_1}^{-1}(k_1^{-1})), id_T) \in K' \end{aligned}$$

Obteniendo que $g'k'g'^{-1} \in K'$ para todo $g' \in G'$ y $k' \in K'$, ergo, K' es normal en G' . ✓

3° Demostraremos que su intersección es el neutro. Como K y T son grupos, casi tautológicamente tenemos que $id_K \in K$ y $id_T \in T$. Luego, $(id_K, id_T) \in K'$ y $(id_K, id_T) \in T'$. O sea, $(id_K, id_T) \in K' \cap T'$. Luego, $K' \cap T' \supset \{(id_K, id_T)\}$

Ahora, si $g' \in K' \cap T'$. Entonces $g' \in K'$ y $g' \in T'$. Por definición de cada uno de ellos, tenemos que existen $k \in K$ y $t \in T$ tal que $(k, id_T) = g' = (id_K, t)$. Luego, $k = id_K$ y $t = id_T$, por lo que $g' = (id_K, id_T)$. Como era cualquier elemento del conjunto, tenemos que $K' \cap T' \subset \{(id_K, id_T)\}$. Concluimos que $K' \cap T' = \{(id_K, id_T)\} = \{id_{G'}\}$. ✓

4° Demostraremos que su multiplicación es todo, mediante doble inclusión. Dado que $K'T' := \{k't' \in G' \mid k' \in K' \text{ y } t' \in T'\}$, automáticamente tenemos que $K'T' \subset G'$.

Ahora bien, si $g' \in G'$, tendremos que existen $k \in K$ y $t \in T$ tal que $g' = (k, t)$. Nos percatamos que.

$$\begin{aligned} g' &= (k, t) \\ &= (k\varphi_{id_t}(id_K), id_Tt) \\ &= (k, id_T)(id_K, t) \in K'T' \end{aligned}$$

Deducimos que $G' \subset K'T'$. Y por lo tanto concluimos que $K'T' = G'$. ✓

Depués de haber demostrado todo eso, viene demostrar lo pedido. Como $G \cong K \rtimes_{\varphi} T$, podemos denotar por $\psi : G \rightarrow K \rtimes_{\varphi} T$ a un isomorfismo entre ellos. Definimos $N := \psi^{-1}(K') = \psi^{-1}(K \times \{id_T\})$ y $H := \psi^{-1}(T') = \psi^{-1}(\{id_K\} \times T)$. Demostraremos que; N y H son subgrupos de G , N es normal en G , $N \cap H = \{id_G\}$ y $G = NH$.

Preparativo: Como ψ es un isomorfismo, tendremos que ψ^{-1} también es un isomorfismo. Debemos notar, que x pertenece a la imagen inversa de K' (o T') bajo ψ si y solo si $\psi(x) \in K'$ (o T'). Esto último sucede si y solo si $\psi^{-1}(\psi(x))$ pertenece a la imagen de K' (o T') bajo ψ^{-1} . Pero al ser inversos, lo último equivale a decir que x pertenece a la imagen de K' (o T') bajo ψ^{-1} . En retrospectiva, x pertenece a la imagen inversa de K' (o T') bajo ψ si y solo si x pertenece a la imagen de K' (o T') bajo ψ^{-1} . O sea, cuando tenemos un isomorfismo, hablar de imagen inversa de una función es lo mismo que hablar de imagen de la función inversa. Lo que significa que podemos ver a N como la imagen de K' bajo ψ^{-1} y a H como la imagen de T' bajo ψ^{-1} . Y es esta última visión la que ocuparemos a lo largo de las demostraciones, para ocupar resultados vistos anteriormente.

5° La demostración de que son subgrupos va de que son la imagen inversa de K' y T' , dos subgrupos (ver 1°). De ahí se sigue por el ejercicio 0.3. del solucionario del control 2. ✓

6° Demostraremos normalidad. Como $\psi^{-1} : K \rtimes H \rightarrow G$ es un isomorfismo, $N = \psi^{-1}(K')$ (es la imagen de K' bajo ψ^{-1}) y K' es normal en $K \rtimes H$ (ver 2°). Por el problema 12.3. c), obtenemos que N es normal en G . ✓

7° Demostraremos que la intersección es el neutro. Como $\psi^{-1} : K \rtimes H \rightarrow G$ es un isomorfismo, $N = \psi^{-1}(K')$ (es la imagen de K' bajo ψ^{-1}), $H = \psi^{-1}(T')$ (es la imagen de T' bajo ψ^{-1}) y $K' \cap T' = \{id_{K \rtimes T}\}$ ver (ver 3°). Por el problema 12.3. b), obtenemos que $N \cap H \cong \{id_{K \rtimes T}\}$. Como el neutro de $N \cap H$ es precisamente id_G , un elemento que necesariamente está en $N \cap H$, ya que este último es un subgrupo de G . Por el isomorfismo anterior y la observación posterior, llegamos automáticamente a que $N \cap H = \{id_G\}$, ya que por la biyección necesitamos que $N \cap H$ tenga un elemento, y este elemento no puede ser ni más ni menos que nuestro querido neutro. ✓

8° Finalmente, demostraremos que $NH = G$. Aquí hay que tener cuidado. Primero nos debemos dar cuenta que como N es normal en G por 6°, entonces NH es un subgrupo de G por el problema 12.0. (Además tenemos regalado que $NH \subset G$).

Además, por el problema 12.3. d), como ψ^{-1} es un isomorfismo, tendremos que $NH = \psi^{-1}(K')\psi^{-1}(T') = \psi^{-1}(K'T')$. Algo que ocuparemos en dos líneas más.

Ahora, por la demostración del problema 12.3. a), $\psi|_{NH} : NH \rightarrow \psi(NH)$, $x \mapsto \psi(x)$; es un isomorfismo. Por el problema 12.3. d), g) y 4°, tenemos que $\psi(NH) = \psi(\psi^{-1}(K'T')) = K'T' = K \rtimes T$. Luego, $\psi|_{NH} : NH \rightarrow K \rtimes T$, $x \mapsto \psi(x)$ es un isomorfismo.

Consideremos el isomorfismo $\psi^{-1} : K \rtimes T \rightarrow G$. Si $z \in G$, por sobreyectividad de ψ^{-1} , existe $y \in K \rtimes T$ tal que $\psi^{-1}(y) = z$. Luego, por sobreyectividad de $\psi|_{NH}$, existe $x \in NH$ tal que $\psi|_{NH}(x) = y$. Juntando todo (y recordando la regla de asignación de $\psi|_{NH}$) tenemos que $z = \psi^{-1}(y) = \psi^{-1}(\psi|_{NH}(x)) = \psi^{-1}(\psi(x)) = x \in NH$. Luego, como z era cualquier elemento de G , deducimos que $NH \supset G$. Y concluimos que $NH = G$. ✓✓ □

Comentario: Un isomorfismo entre NH y G no bastaba para decir que eran iguales. Ya que $\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}$ mediante la función que envía x a $2x$, pero no son iguales.