Ayudantía 24

Profesor: Cristóbal Rivas

Ayudantes: Benjamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 25 de Noviembre 2022

Ejercicios para la ayudantía

Lema 24.1. Sea A un D.I. Dado $a \in A$, denotamos por $(a) := \{ab \mid b \in A\}$ al ideal generado por $a \in A$. Sean $a, b \in A$

- Muestre que $(a) \subseteq (b)$ si y solo si b divide a a .
- Muestre que $(a) = (b)$ si y solo si b y a son asociados.

Ejercicio 24.1. Sea A un D.I.P. y sean $a, b \in A$

- Muestre que $(a) + (b) := \{k_1a + k_2b \mid k_1, k_2 \in A\}$ es un ideal de A . Muestre además que $(a) + (b)$ coincide con (a, b) , el ideal generado por a y b .
- Muestre que $d = MCD(a, b) \Leftrightarrow (d) = (a) + (b)$.
- Muestre que $m = MCM(a, b) \Leftrightarrow (m) = (a) \cap (b)$

Ejercicio 24.2. Sean $F \subset L \subset K$ extensiones de cuerpos, pruebe que si K/L y L/F son algebraicos, entonces K/F es algebraico.

Ejercicios para la casita

Ejercicio 24.3. Sea A un D.I. Sean $a, b \in A$. Demuestre que a y b son asociados si y solo si a divide a b y b divide a a .

Ejercicio 24.3. Muestre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ no es subcuerpo de $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Hint: Use el Lema 2.90. (b) de los apuntes del curso.

Ejercicio 24.4. consideremos el cuerpo de p elementos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo. Sea $n \in \mathbb{N}$.

- Demuestre que $\alpha^{p^n} = \alpha \forall \alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Hint: Recuerde que el grupo multiplicativo de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

- Supongamos que existe K , un cuerpo que contiene a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y a todas las raíces del polinomio $p(x) = x^{p^n} - x \in K[x]$. Demuestre que el conjunto $L := \{\alpha \in K \mid p(\alpha) = 0\}$ es un subcuerpo de K que contiene a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Hint: Use el Lema del mechón.

- Deduzca que L tiene finitos elementos y que por ende $[L : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] < \infty$.
- Supongamos $[L : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = l$. Muestre que L tiene p^l elementos con $l \leq n$.

Hint: Usar el hecho de que L es un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espacio vectorial.