Ayudantia 20

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benjamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 11 de Noviembre 2022

Ejercicios para la ayudantía.

Ejercicio 20.1. Juguemos con numeritos.

a) Demostrar que 3 es irreducible pero no primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

b) Dar dos factorizaciones de 2 en números irreducibles dentro de $\mathbb{Z}$. ¿Por qué esto no contradice el hecho de que sea un DFU?

c) Encontrar $MCD(5, -1+3i)$ en $\mathbb{Z}[i]$. Además encontrar una factorizacion en irreducibles de cada uno.

Sea A un anillo. Diremos que A es Booleano si $x^2 = x$ para todo $x \in A$, es decir, si todos sus elementos son idempotentes.

Ejercicio 20.2. Sea A un anillo Booleano conmutativo con unidad. Demuestre:

a) $2x = 0$ para todo $x \in A$.

b) Sean $a, b \in A$, demuestre que existe $c \in A$ tal que $(a) + (b) = (c)$.

c) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces es un ideal maximal de A. Más aun $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo de dos elementos.

d) Si además A es un dominio de integridad, deducir que todo elemento primo es maximal.

Ejercicio 20.3. Sean A un anillo y R un DI. Demuestre los siguientes enunciados.

a) $A[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en A, no es un cuerpo.

b) Deducir que todo dominio de integridad está contenido en un dominio euclideano que no es un cuerpo.

c) $Frac(R)[x] \subsetneq Frac(R[x])$.

d) Si $R \subset A \subset Frac(R)$, entonces $Frac(A) = Frac(R)$.

Ejercicios para la casita.

Ejercicio 20.4. Recuerde que un anillo se dice Booleano si todos sus elementos son idempotentes. Demuestre.

a) Todo anillo Booleano es conmutativo.

b) Existe un anillo Booleano de infinitos elementos.

Ejercicio 20.5. (En colaboración con Emir Molina T.). Sean $(G,+)$ un grupo y $(A,+,\cdot)$ un anillo. Si existe un isomorfismo de grupos $\psi:(G,+)\longrightarrow(A,+)$. Demostrar que $(G,+,*)$ es un anillo, donde $*$ se define como sigue.

$$\begin{aligned} *: G\times G\longrightarrow G,\ (a,\,b) &\mapsto \psi^{-1}(\psi(a)\psi(b)) \\ a*b &= \psi^{-1}(\psi(a)\psi(b)) \end{aligned}$$

Hint:
Recordar que $\psi(a),\ \psi(b)\in A$ para todo $a,\ b\in G$.
Recordar que como ψ es biyectiva, $\psi^{-1}:A\longrightarrow G$ es una función bien definida. Más aun, recordar que como ψ es un isomorfismo de grupos, entonces ψ^{-1} también es un isomorfismo de grupos.

Ejercicio 20.6. Sea L un cuerpo de característica p. Demostrar que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es isomorfo a un subcuerpo de L.
Nota: Sea L un cuerpo. Diremos que un subconjunto $B\subset L$ es un subcuerpo, si es un subanillo y además un cuerpo.

Ejercicio 20.7. Encontrar el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de $3+2i$ y $5+i$ en $\mathbb{Z}[i]$.

Ejercicio 20.8. Sean L, M cuerpos. Sea $\psi:L\longrightarrow M$ un isomorfismo de cuerpos. Demostrar que $\varphi:L[x]\longrightarrow M[x]$, $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mapsto\sum_{i=0}^{n}\psi(a_i)x^i$ es un isomorfismo de anillos.

Ejercicio 20.9. Sean K, L, F, M cuerpos tal que L es una extensión de K y M es una extensión de F. Sea $\psi:L\longrightarrow M$ un isomorfismo de cuerpos. Sea $\alpha\in L$ algebraico sobre K, demostrar que $\psi(\alpha)\in M$ es algebraico sobre F.

Ejercicio 20.10. Sea A un anillo y $S:=\{xy-yx\mid x,\,y\in A\}$. Considere el ideal generado por S, definido en el ejercicio 17.5. de la ayudantía 17. Demostrar que $A/[S]$ es un anillo conmutativo.
Hint: Usar definiciones.

Ejercicio 20.11. Sea $n\in\mathbb{N}$. Consideremos $R=\mathbb{Z}+\sqrt{-n}\mathbb{Z}:=\{a+b\sqrt{-n}\mid a,\,b\in\mathbb{Z}\}$. Definimos la función $N:R\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{N}$, $a+b\sqrt{-n}\mapsto a^2+nb^2=(a+b\sqrt{-n})(a-b\sqrt{-n})$. Demostrar que $N(xy)=N(x)N(y)$ para todo $x,\,y\in R\setminus\{0\}$.
Nota: No hemos demostrado que R es un anillo. Pero se puede demostrar que es el subanillo de $\mathbb{C}$ generado por $S=\mathbb{Z}\cup\{\sqrt{-n}\}$.