Estructuras Algebraicas
Ayudantia 21

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Lunes 14 de Noviembre 2022

1. Calcular $\mathbb{Q}[x]/(p(x))$, donde $p(x) = x^4 - x^2 - 1$.
2. Calcular el inverso de $\theta^2 + \theta + 1$ en $\mathbb{Q}(\theta)$, donde θ es raíz de $x^3 - 2$.
3. Fabricar cuerpos de ordenes $2^5, 3^2, 17$ y 101. ¿Se pueden fabricar cuerpos de orden $6, 1001$ y 2^n, $\forall n \in \mathbb{N}$?
4. Determinar $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$.
5. Sea F un cuerpo y $F(\alpha)$ una extensión algebraica finita. Demostrar que si $[F(\alpha) : F]$ es impar, entonces $F(\alpha) = F(\alpha^2)$. ¿Es el reciproco cierto?
6. Sea A un anillo ccu. Diremos que $a \in A$ es nilpotente si $\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0$. Demuestre que si $a \in A$ es nilpotente, entonces $1 + a \in A^*$.
7. Sea $\mathfrak{N}(A)$ el conjunto de todos los nilpotentes de A (llamado el nilradical de A). Demuestre que $\mathfrak{N}(A)$ es igual a la intersección de todos los ideales primos de A.
   Concluya que si D es un dominio, entonces la intersección de todos sus ideales primos es trivial.
8. Sea A anillo ccu y $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$. Demuestre que

   a) f nilpotente si y solo si $\{a_i\}_{i=0}^{n} \subset \mathfrak{N}(A)$.
   b) $f \in (A[x])^*$ si y solo si $a_0 \in A^*$ y $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathfrak{N}(A)$.

   Concluir que si D es un dominio, entonces $(D[x])^* = D^*$
9. Sea F cuerpo, sean $p(x) \in F[x]$ y $a \in F$. Demostrar que $p(x)$ irreducible en F si y solo si $p(x + a)$ irreducible.
10. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $\zeta_p := e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$. Determinar $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}]$.
    Hint: Usar que $(\zeta_p)^p = 1$, el ejercicio anterior y criterio de Eisenstein (solo usarlo).