Estructuras Algebraicas
Ayudantia 19

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Lunes 7 de Noviembre 2022

1. Demuestre que en un tablero de ajedrez infinito el caballo puede llegar a cualquier casilla.
2. Demuestre que si $I \subset A$ un ideal, entonces $I[x]$ es ideal en $A[x]$ y $A[x]/I[x] \cong (A/I)[x]$.
3. Demuestre que $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{Z}[x]/(x^2+x-1) \cong \mathbb{Z}[\omega]$
4. Sea $I \subset A$ ideal. Demuestre que I primo si y solo si A/I es dominio.
5. Demuestre que si k es un cuerpo, entonces $(k[x], deg)$ es un DE.
6. Sea D un DIP y $\mathfrak{p} \subset D$ primo. Demuestre que los generadores de $\mathfrak{p}$ son primos.
7. Sea D un dominio y $a \in D$ irreducible. Demostrar que (a) es maximal entre los ideales principales. Concluir que en un DIP todo ideal primo es maximal.
8. Determine si 2 es primo en $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{Z}[\omega]$.
9. Sea d un entero positivo libre de cuadrados.
   a) Demuestre que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es isomorfo al subanillo D de $\mathbb{R}^2$ generado por $1_D = (1,1)$ y $\delta = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$.
   b) Asumiendo que $\{z+U\}_{z\in D}$ cubre a $\mathbb{R}^2$, donde $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$, demuestre que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un dominio euclideano con $\nu(x+y\sqrt{d}) = |x^2 - dy^2|$.