Ayudantia 18

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 05 de Noviembre 2022

Ejercicios para la ayudantía.

Lema 18.1. Sea A un anillo conmutativo e $I \neq A$ un ideal de A tal que A/I es un cuerpo. Entonces I es un ideal maximal de A.

Demostración. Sea J un ideal de A tal que $I \subset J$. Probaremos que $J = I$ o $J = A$.

Por el teorema de correspondencia; es decir, el Ejercicio 17.4. de la ayudantía anterior, tendremos que J/I es un ideal de A/I. Pero dado que A/I es un cuerpo, el teorema 2.25. de los apuntes nos dice que sus únicos ideales son A/I y $\{0 + I\} = I/I$. Luego, $J/I = A/I$ o $J/I = I/I$. Finalmente, por el teorema de correspondencia obtenemos que $J = A$ o $J = I$. □

Ejercicio 18.1. Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones de X a $\mathbb{R}$. Vimos que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ es un anillo con la suma y producto puntual. Sea $Y \subset X$.

Nota: Recordemos que dos funciones f, $g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ son iguales si y solo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Además, recordemos que por definición $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$.

a) Demuestre que $I_Y := \{f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \forall x \in Y\}$ es un ideal de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

Demostración. Demostraremos que es un subgrupo con la suma y absorbe por la izquierda. Podemos asumir que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ es un anillo conmutativo, por lo que absorber por la izquierda es equivalente a absorber por la derecha.

1° Es un subgrupo. Demostraremos que no es vacío y cerrado bajo resta.
Denotemos $0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ a la función que envía todo elemento de X al cero en los reales. Tenemos que $0(x) = 0$ para todo $x \in X$, en particular, $0(x) = 0$ para todo $x \in Y$, ya que $Y \subset X$. Luego, por definición de I_Y, tendremos que $0 \in I_Y$ y por ende $I_Y \neq \emptyset$.
Sean f, $g \in I_Y$, esto nos dice que $f(x) = 0 = g(x)$ para todo $x \in Y$. Queremos demostrar que $f - g \in I_Y$, para eso veremos que verifican la definición de I_Y. Sea $x \in Y$, tendremos (1).

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0 - 0 = 0 \tag{1}$$

Luego, $(f - g)(x) = 0$ para todo $x \in Y$, por ende $f - g \in I_Y$.
Concluimos que I_Y es un subgrupo con la suma.

2° Es un ideal. Dado que estamos en un anillo conmutativo, solo demostraremos que nuestro subgrupo absorbe por la izquierda.
Sean $f \in I_Y$ y $g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, tendremos que $f(x) = 0$ para todo $x \in Y$ y queremos demostrar que $gf \in I_Y$. Sea $x \in Y$, véase (2).

$$(gf)(x) = g(x)f(x) = g(x) \cdot 0 = 0 \tag{2}$$

Luego, $(gf)(x) = 0$ para todo $x \in Y$ y por ende $gf \in I_Y$.
Deducimos que absorbe por la izquierda y concluimos que es un ideal. □

b) Demuestre que si Y es un singleton, digamos $Y = \{x_0\}$, entonces I_Y es un ideal maximal de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

Demostración. Demostraremos que I_Y es maximal dado que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ sea un cuerpo, usaremos el Lema 18.1.

1° Será un cuerpo. Usaremos la isomorfía del Ejercicio 18.1. c). Como queremos demostrar que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ es un cuerpo, y al ser el cociente de un anillo conmutativo con un ideal ya tenemos que es un anillo conmutativo, solo nos falta demostrar que es un anillo de división.

2° Es un anillo con unidad.
Consideramos la clase de la función constante $1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$. Esta función nos lleva todo los elementos de X al neutro multiplicativo de los reales 1. Notemos en (3) que es el neutro multiplicativo en $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Sea $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ y $x \in X$.

$$(1f)(x) = 1(x)f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \tag{3}$$

Como lo anterior se cumpla para todo $x \in X$, tendremos que $1f = f$ y como nuestro anillo es conmutativo deducimos que es también un anillo con unidad.
Ahora sea $f + I_Y \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$, notemos en (4) que $1 + I_Y \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ es su neutro multiplicativo.

$$(1 + I_Y)(f + I_Y) = (1f) + I_Y = f + I_Y \tag{4}$$

Al ser $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ un anillo conmutativo, concluimos que además es un anillo con unidad.

3° Es un anillo de división. Mostraremos que todo elemento distinto de cero es invertible. Por el ejercicio posterior, tendremos que $\psi : \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $f + I_Y \longrightarrow f(x_0)$ es un isomorfismo. Sea $f + I_Y \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ distinto del neutro aditivo
Sabemos que $\psi(0 + I_Y) = 0$ por ser homomorfismo de anillos. Luego, como ψ es inyectiva y $f + I_Y \neq 0 + I_Y$, tendremos que $\psi(f + I_Y) \neq 0$. Luego, como $\psi(f + I_Y) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos hablar de $\dfrac{1}{\psi(f + I_Y)} \in \mathbb{R}$. Ahora, como nuestra función es sobreyectiva, existe un $g + I_Y \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ tal que $\psi(g + I_Y) = \dfrac{1}{\psi(f + I_Y)}$. Véase (5), donde usamos el hecho de que ψ es un homomorfismo de anillos.

$$\psi((f + I_Y)(g + I_Y)) = \psi(f + I_Y)\psi(g + I_Y) = \frac{\psi(f + I_Y)}{\psi(f + I_Y)} = 1 = \psi(1 + I_Y) \tag{5}$$

Luego, por inyectividad tenemos que $(f + I_Y)(g + I_Y) = 1 + I_Y$, y dado que el anillo es conmutativo, deducimos que $g + I_Y$ es el inverso multiplicativo de $f + I_Y$.
Como $f + I_Y$ solo era un elemento distinto del neutro aditivo, podemos deducir que todo elemento distinto del cero en $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ tiene un inverso multiplicativo.
Concluimos que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ es un anillo de división conmutativo y por ende, un cuerpo.

4° Es un ideal maximal.
Dado que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ es un anillo conmutativo y $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ es un cuerpo, el Lema 18.1 nos dice que I_Y es un ideal maximal. □

c) Muestre que si Y es un singleton, entonces $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ es isomorfo como anillo a $\mathbb{R}$.

Demostración. Como la solución del ejercicio anterior adelantó, demostraremos que $\psi : \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $f + I_Y \longrightarrow f(x_0)$ es un isomorfismo.

1° Está bien definida.
Vemos que puede tomar cualquier elemento del dominio. Ya que al ser funciones desde X las representantes de las clases laterales, estas pueden ser evaluadas en cualquier elemento del dominio, en particular, en $x_0 \in X$.
Además notamos que la imagen de cualquier elemento del dominio cae en el codominio. Ya que al ser funciones que van a $\mathbb{R}$ las representantes de las clases laterales, al ser evaluadas en un elemento de los reales, estas dan un número real. Es decir, $f(x_0) \in \mathbb{R}$.
Notamos además que la regla de asignación está bien definida. Sean $f + I_Y$, $g + I_Y \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$ tales que $f + I_Y = g + I_Y$, queremos demostrar que $\psi(f + I_Y) = \psi(g + I_Y)$.
Tendremos las siguientes equivalencias dadas por las siguientes razones.
(6): Problema 3.2. a) de la ayudantía 3.
(7): Definición de nuestro ideal I_Y.
(8): Propiedades de funciones.
(9): Usar propiedades del grupo de los reales con la suma usual.
(10): Definición de ψ.

$$\begin{aligned} f + I_Y = g + I_Y &\iff f - g \in I_Y && (6) \\ &\iff (f-g)(x_0) = 0 && (7) \\ &\iff f(x_0) - g(x_0) = 0 && (8) \\ &\iff f(x_0) = g(x_0) && (9) \\ &\iff \psi(f + I_Y) = \psi(g + I_Y) && (10) \end{aligned}$$

Concluimos que ψ es una función.

2° Inyectividad.
El si y solo si (10), nos dice que ψ es inyectiva.

3° Sobreyectividad.
Sea $c \in \mathbb{R}$. Consideramos la función constante $c : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c$. Calculamos en (11).

$$\psi(c + I_Y) = c(x_0) = c \qquad (11)$$

Por lo tanto, $Im(\psi) = \mathbb{R}$ y nuestra función es sobreyectiva.

4° Será un homomorfismo de anillos. Para esto veremos que preserva suma, multiplicación y al neutro multiplicativo.

5° Preserva la suma. Sean $f + I_Y$, $g + I_Y \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$, tendremos las siguientes igualdades dadas las siguientes razones.
(12): Por definición de la suma en el grupo cociente.
(13) y (15): Por definición de nuestra función.
(14): Por propiedades de funciones.

$$\begin{aligned} \psi((f + I_Y) + (g + I_Y)) &= \psi((f+g) + I_Y) && (12) \\ &= (f+g)(x_0) && (13) \\ &= f(x_0) + g(x_0) && (14) \\ &= \psi(f + I_Y) + \psi(g + I_Y) && (15) \end{aligned}$$

Concluimos que nuestra función preserva la suma.

6° Preserva la multiplicación. Sean $f + I_Y$, $g + I_Y \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})/I_Y$, tendremos las siguientes igualdades dadas las siguientes razones.

(16): Por definición de la multiplicación en el anillo cociente.
(17) y (19): Por definición de nuestra función.
(18): Por propiedades de funciones.

$$\begin{aligned}\psi((f+I_Y)(g+I_Y)) &= \psi((fg)+I_Y) && (16)\\ &= (fg)(x_0) && (17)\\ &= f(x_0)g(x_0) && (18)\\ &= \psi(f+I_Y)\psi(g+I_Y) && (19)\end{aligned}$$

Concluimos que nuestra función preserva la multiplicación.

7° Preserva el neutro multiplicativo. Dado que los dos anillos involucrados en nuestra función, son anillos con unidad. Para demostrar que es un homomorfismo de anillos debemos mostrar que preserva el neutro.
Recordando los neutros de cada anillo, tendremos las siguientes igualdades dadas las siguientes razones.
(20): Definición de ψ.
(21): Definición de la función 1.

$$\begin{aligned}\psi(1+I_Y) &= 1(x_0) && (20)\\ &= 1 \in \mathbb{R} && (21)\end{aligned}$$

Concluimos que preserva al neutro. Dado 5° y 6°, además concluimos que es un homomorfismo de anillos.

Dado que es un homomorfismo de anillos, y por 2° y 3° es una biyección, concluimos que es un isomorfismo. Por lo tanto los anillos involucrados son isomorfos. □

Lema 18.2. Consideremos el anillo de los complejos con las operaciones usuales. Sea B un subanillo de los complejos. Demostrar que $D[i] := \{a + bi \mid a,\, b \in D\}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

Demostración. Demostraremos que es un subgrupo y que es cerrado bajo la multiplicación.

1° Es un subgrupo. Veremos que es distinto de vacío y cerrado bajo resta.
Dado que $0 \in B$ por ser un subanillo, notamos que $0 = 0 + 0 \cdot i \in B[i]$. Por lo tanto nuestro candidato no es vacío.
Ahora, sean $a + bi,\, c + di \in B[i]$ cualesquiera con $a,\, b,\, c,\, d \in B$, mostraremos que $(a + bi) - (c + di) \in B[i]$. Calculamos y obtendremos (22) reordenando terminos.

$$(a + bi) - (c + di) \quad = \quad (a - c) + (b - d)i \tag{22}$$

Dado que B es un subanillo y $a,\, b,\, c,\, d \in B$. Tendremos que $(a-c),\, (b-d) \in B$. Por definición de $B[i]$ y (22) deducimos que $(a + bi) - (c + di) \in B[i]$.
Conluimos que nuestro conjunto es no vacío y cerrado bajo resta, por lo tanto es un subgrupo con la suma de $\mathbb{C}$.

2° Cerrado bajo multiplicación.
Sean $a+bi,\, c+di \in B[i]$ cualesquiera con $a,\, b,\, c,\, d \in B$. Mostraremos que $(a+bi)(c+di) \in B[i]$.
Calculando y reordenando tendremos (23).

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{23}$$

Como B es un subanillo y $a,\, b,\, c,\, d \in B$, tendremos que $(ac - bd),\, (ad + bc) \in B$. Así, por definición de $B[i]$ y (23) obtenemos que $(a + bi)(c + di) \in B[i]$.
Deducimos que nuestro subgrupo es cerrado bajo multiplicación.

Por 1° y 2° concluimos que nuestro candidato es efectivamente un subanillo. □

Ejercicio 18.2. Dados $S \subset A$, denotamos por $\langle S\rangle$ a la intersección de todos los subanillos de A que contienen a S.

a) Demuestre que $\langle S\rangle$ es un subanillo de A. Lo llamamos el **anillo generado por** S.

Demostración. La demostración de este ítem se hizo en el Ejercicio 17.1. a) 1° y 2° de la ayudantía 17. □

b) Muestre que el subanillo de $\mathbb{C}$ generado por $S = \{1, i\}$ es $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. A este anillo se le conoce como los enteros Gaussianos.

Demostración. Demostraremos por doble inclusión que $\langle S\rangle = \mathbb{Z}[i]$. Para eso recordaremos la definición de intersección en (24). Denotamos por $\mathcal{F}$ a la familia de subanillos de $\mathbb{C}$ que contengan a S.

$$x \in \langle S\rangle := \cap_{B\in\mathcal{F}} B \iff x \in B \ \forall B \in \mathcal{F} \tag{24}$$

1° $\subset$. Mostraremos que $\mathbb{Z}[i]$ es uno de los subanillos que se intersecta para formar $\langle S\rangle$.
Ya que $\mathbb{Z}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$, por el Lema 18.2. tenemos que $\mathbb{Z}[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.
Además, usando la definición de $\mathbb{Z}[i]$, tendremos que $1 = 1+0\cdot i \in \mathbb{Z}[i]$ e $i = 0+1\cdot i \in \mathbb{Z}[i]$, por lo tanto $S \subset \mathbb{Z}[i]$.
Como $\mathbb{Z}[i]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$ que contiene a S, tendremos que $\mathbb{Z}[i]$ pertenece a nuestra familia de subanillos $\mathcal{F}$. Luego, por (24) tenemos que $x \in \langle S\rangle \implies x \in \mathbb{Z}[i]$, lo que significa que $\langle S\rangle \subset \mathbb{Z}[i]$.

2° $\supset$. Si $x \in \mathbb{Z}[i]$ tendremos que tendrá la forma $x = a + bi$, donde a, $b \in \mathbb{Z}$. Demostraremos que todos estos elementos están en $\langle S\rangle$. Recordemos que por el Ejercicio 18.2. a), $\langle S\rangle$ es un anillo.
Como S está contenido en todos los subanillos en nuestra familia $\mathcal{F}$, por (24) tendremos que S está contenido en $\langle S\rangle$. Luego, 1, $i \in \langle S\rangle$.
Dado que $\langle S\rangle$ es cerrado bajo suma e inversos aditivos, tendremos que $n = \underbrace{1 + ... + 1}_{n-veces}$, -1, $0 \in \langle S\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, como es cerrado bajo multiplicación, tendremos que $-n = n \cdot -1 \in \langle S\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conseguimos mostrar que $b \in \langle S\rangle$ para todo $b \in \mathbb{Z}$. Luego, $bi \in \langle S\rangle$ para todo $b \in \mathbb{Z}$, ya que nuestro conjunto es cerrado bajo multiplicación.
Finalmente, como $\langle S\rangle$ es cerrado bajo suma, tendremos que $a + bi \in \langle S\rangle$ para todo a, $b \in \mathbb{Z}$.
Conluimos que $\mathbb{Z}[i] \subset \langle S\rangle$.

Por 1° y 2° concluimos que $\langle S\rangle = \mathbb{Z}[i]$. □

c) Describa (al estilo del subitem b) el subanillo de $\mathbb{C}$ generado por $S = \mathbb{Q} \cup \{i\}$ y muestre que en realidad $\langle S\rangle$ es un cuerpo.

Demostración. 1° Afirmamos que $\langle S\rangle = \mathbb{Q}(i) := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Tendremos que $a = a + 0 \cdot i$, $i = 0 + 1 \cdot i \in \mathbb{Q}(i)$ para todo $a \in \mathbb{Q}$. Luego, $S \subset \mathbb{Q}(i)$ y por lo tanto $\langle S\rangle\mathbb{Q}(i)$.
Como $\langle S\rangle$ es un anillo, $\mathbb{Q} \subset \langle S\rangle$ y $i \in \langle S\rangle$, tendremos que $a+bi \in \langle S\rangle$ para todo a, $b \in \mathbb{Q}$.
Luego, $\mathbb{Q}(i) \subset \langle S\rangle$.
Concluimos que efectivamente $\langle S\rangle = \mathbb{Q}(i)$.

2° Es un cuerpo.
De 1° tenemos que $\mathbb{Q}(i)$ es un anillo, como es un subanillo de $\mathbb{C}$ tendremos que hereda la conmutatividad. Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo, en particular tendremos que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un

grupo abeliano con la multiplicación. Como $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C}$, es un anillo conmuativo, solo nos falta demostrar que $\mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$ es un subgrupo con la multiplicación de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dado que $\mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$ no es vacío y es cerrado bajo la multiplicación, solo debemos mostrar que es cerrado bajo inversos.
Sea $a + bi \in \mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$, tendremos que $a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0$. Luego, podemos considerar $\dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2} i \in \mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$, mostraremos que es el inverso buscado. En (25) calculamos.

$$\begin{aligned}
(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i\right) &= (a+bi)\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) && (25)\\
&= \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} && (26)\\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} && (27)\\
&= 1 && (28)
\end{aligned}$$

Obtenemos que todo elemento tiene a su inverso dentro del conjunto. Deducimos que es cerrado bajo inversos. Esto significa que $\mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$ es un subgrupo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con la multiplicación.
Concluimos que $\mathbb{Q}(i)$ es un cuerpo. □

Ejercicio 18.3. Sean A y B anillos con unidad. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in A$ y además existe un $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = 1 \in B$. Demostrar que f es un homomorfismo de anillos.

Demostración. Dado que los anillos A y B tienen neutro multiplicativo por hiótesis, para demostrar que es un homomorfismo de anillos es necesario demostrar que $f(1) = 1$. Dado que f ya preserva la suma y la multiplicación por hiótesis, solo nos falta demostrar que $f(1) = 1$.

Tendremos las siguientes igualdades dadas las siguientes razones.
(29), (31) y (32): Por hiótesis.
(30): Ya que $1 \in A$ es el neutro multiplicativo de A.
(33): Ya que $1 \in B$ es el neutro multiplicativo de B.

$$\begin{aligned}
1 &= f(x_0) && (29)\\
&= f(1 \cdot x_0) && (30)\\
&= f(1) \cdot f(x_0) && (31)\\
&= f(1) \cdot 1 && (32)\\
&= f(1) && (33)
\end{aligned}$$

Concluimos que f es un homomorfismo de anillos. □

Nota: Considerando una función $f : A \longrightarrow B$ entre dos anillos con unidad. Si f es sobreyectivo, entonces en particular tendremos que existe un $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = 1 \in B$. Por lo tanto si f es sobreyectiva, preserva suma y preserva multiplicación, por el ejercicio anterior automáticamente será un homomorfismo de anillos.

Ejercicios para la casita.

Antes un recordatorio. Sea A un anillo $x \in A$ y $n \in \mathbb{Z}$.

$$nx := \begin{cases} \underbrace{x + ... + x}_{n-veces} \in A & si \quad n > 0 \\ 0 \in A & si \quad n = 0 \\ \underbrace{(-x) + ... + (-x)}_{|n|-veces} \in A & si \quad n < 0 \end{cases}$$

$$x^n := \begin{cases} \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n-veces} \in A & si \quad n > 0 \\ 1 \in A & si \quad n = 0 \text{ y } A \text{ es un anillo con unidad} \\ \underbrace{x^{-1} \cdot ... \cdot x^{-1}}_{|n|-veces} \in A & si \quad n < 0 \text{ y existe un } x^{-1} \in A \end{cases}$$

Ejercicio 18.4. Sea A un anillo conmutativo. Sean $a,\, b \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Demostrar:

$$(a+b)^n = a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Hint: Usar inducción en n y recordar propiedades de los coeficientes binomiales.

Ejercicio 18.5. (El sueño del mechón) Sea A un anillo conmutativo con característica $n > 0$. Demostrar que para todo $a,\, b \in A$.

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

Ejercicio 18.6. Demostrar que el anillo $\mathcal{H}$ del ejercicio (10) de la guía 4 es isomorfo como anillo al anillo $\mathbb{H}$ del ejercicio 4. de la ayudantía 16.
Consideremos el anillo de matrices con coeficientes en los complejos. Consideremos un subconjunto dado por.

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Y recordemos nuestro querido Hamilton.

$$\mathbb{H} := \{ a + bi + cj + dk \mid a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \wedge ij = k \}$$

a) Demostrar que $\mathcal{H}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

b) Demostrar que $\mathcal{H}$ es isomorfo como anillo a $\mathbb{H}$.
Hint: Notemos que todo elemento en $\mathcal{H}$ se puede escribir de la siguiente forma.

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bi & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & di \\ di & 0 \end{pmatrix}$$

c) Deducir que $\mathcal{H}$ es un anillo de división no conmutativo.
Hint: Recordar que $\mathbb{H}$ es un anillo de división no conmutativo.

Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea $x \in A$. Recordemos de la ayudantía anterior que $xA := \{xa \mid a \in A\}$ es un ideal de A, más bien, es el ideal más pequeño que contiene a x.

Ejercicio 18.7. Sea A un anillo conmutativo con unidad y $x \in A$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) x es invertible.

b) x no pertenece a ningún ideal maximal.

c) $xA = A$.

Hint: Demostrar que a) implica b), después demostrar que b) implica c) y finalizar demostrando que c) implica a).
Hint$_2$: Recordar el Teorema 2.33. de los apuntes, todo ideal contenido propiamente en A (o sea distinto de A) está contenido en un ideal maximal de A. Es decir, si I es un ideal de A tal que $I \neq A$, entonces existe un ideal maximal m de A tal que $I \subset m$. En los apuntes se demostró para ideales por la izquierda, pero dado que nuestro A es conmutativo, todo ideal por la izquierda es ideal por la derecha y viceversa, todo ideal es bilatero.

Ejercicio 18.8. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Denotamos por $Jac(\{0\})$ a la intersección de todos los ideales maximales de A, es llamado el radical de jacobson de A. Sea $x \in A$, demostrar que $x \in Jac(\{0\})$ si y solo si $1 - yx$ es invertible para todo $y \in A$.