Ayudantia 18

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 05 de Noviembre 2022

Ejercicios para la ayudantía.

Ejercicio 18.1. Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones de X a $\mathbb{R}$. Vimos que $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ es un anillo con la suma y producto puntual. Sea $Y \subset X$.

a) Demuestre que $I_Y := \{f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \forall x \in Y\}$ es un ideal de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

b) Demuestre que si Y es un singleton, digamos $Y = \{x_0\}$, entonces I_Y es un ideal maximal de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.

c) Muestre que si Y es un singleton, entonces $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})/I_Y$ es isomorfo como anillo a $\mathbb{R}$.

Ejercicio 18.2. Dados $S \subset A$, denotamos por $\langle S \rangle$ a la intersección de todos los subanillos de A que contienen a S.

a) Demuestre que $\langle S \rangle$ es un subanillo de A. Lo llamamos el **anillo generado por** S.

b) Muestre que el subanillo de $\mathbb{C}$ generado por $S = \{1, i\}$ es $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. A este anillo se le conoce como los enteros Gaussianos.

c) Describa (al estilo del subitem b) el subanillo de $\mathbb{C}$ generado por $S = \mathbb{Q} \cup \{i\}$ y muestre que en realidad $\langle S \rangle$ es un cuerpo.

Ejercicio 18.3. Sean A y B anillos con unidad. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función sobreyectiva tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo x, $y \in A$. Demostrar que f es un homomorfismo de anillos.

Ejercicios para la casita.

Antes un recordatorio. Sea A un anillo $x \in A$ y $n \in \mathbb{Z}$.

$$nx := \begin{cases} \underbrace{x + ... + x}_{n-veces} \in A & si \quad n > 0 \\ 0 \in A & si \quad n = 0 \\ \underbrace{(-x) + ... + (-x)}_{|n|-veces} \in A & si \quad n < 0 \end{cases}$$

$$x^n := \begin{cases} \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n-veces} \in A & si \quad n > 0 \\ 1 \in A & si \quad n = 0 \text{ y } A \text{ es un anillo con unidad} \\ \underbrace{x^{-1} \cdot ... \cdot x^{-1}}_{|n|-veces} \in A & si \quad n < 0 \text{ y existe un } x^{-1} \in A \end{cases}$$

Ejercicio 18.4. Sea A un anillo conmutativo. Sean a, $b \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Demostrar:

$$(a+b)^n = a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Hint: Usar inducción en n y recordar propiedades de los coeficientes binomiales.

Ejercicio 18.5. (El sueño del mechón) Sea A un anillo conmutativo con característica $n > 0$. Demostrar que para todo a, $b \in A$.

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

Ejercicio 18.6. Demostrar que el anillo $\mathcal{H}$ del ejercicio (10) de la guía 4 es isomorfo como anillo al anillo $\mathbb{H}$ del ejercicio 4. de la ayudantía 16.
Consideremos el anillo de matrices con coeficientes en los complejos. Consideremos un subconjunto dado por.

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Y recordemos nuestro querido Hamilton.

$$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \mid a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \wedge ij = k\}$$

a) Demostrar que $\mathcal{H}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

b) Demostrar que $\mathcal{H}$ es isomorfo como anillo a $\mathbb{H}$.
Hint: Notemos que todo elemento en $\mathcal{H}$ se puede escribir de la siguiente forma.

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bi & 0 \\ 0 & -bi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & di \\ di & 0 \end{pmatrix}$$

c) Deducir que $\mathcal{H}$ es un anillo de división no conmutativo.
Hint: Recordar que $\mathbb{H}$ es un anillo de división no conmutativo.

Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea $x \in A$. Recordemos de la ayudantía anterior que $xA := \{xa \mid a \in A\}$ es un ideal de A, más bien, es el ideal más pequeño que contiene a x.

Ejercicio 18.7. Sea A un anillo conmutativo con unidad y $x \in A$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) x es invertible.

b) x no pertenece a ningún ideal maximal.

c) $xA = A$.

Hint: Demostrar que $a)$ implica $b)$, después demostrar que $b)$ implica $c)$ y finalizar demostrando que $c)$ implica $a)$.
Hint$_2$: Recordar el Teorema 2.33. de los apuntes, todo ideal contenido propiamente en A (o sea distinto de A) está contenido en un ideal maximal de A. Es decir, si I es un ideal de A tal que $I \neq A$, entonces existe un ideal maximal m de A tal que $I \subset m$. En los apuntes se demostró para ideales por la izquierda, pero dado que nuestro A es conmutativo, todo ideal por la izquierda es ideal por la derecha y viceversa, todo ideal es bilatero.

Ejercicio 18.8. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Denotamos por $Jac(\{0\})$ a la intersección de todos los ideales maximales de A, es llamado el radical de jacobson de A. Sea $x \in A$, demostrar que $x \in Jac(\{0\})$ si y solo si $1 - yx$ es invertible para todo $y \in A$.