Ayudantía 17

Profesor: Cristóbal Rivas

Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 28 de Octubre 2022

Ejercicios propuestos para ayudantía.

Lema 17.1. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Sean $a_1, \dots, a_n \in A$, definimos la sumatoria como $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + \dots + a_n$, dado que la suma es asociativa la sumatoria está bien definida. Demostrar que $-(\sum_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n (-a_i)$.

Demostración. Como la suma es conmutativa, tenemos que $(a_1 + \dots + a_n) + ((-a_1) + \dots + (-a_n)) = 0$. Luego, $(\sum_{i=1}^n a_i) + (\sum_{i=1}^n (-a_i)) = 0$. Por unicidad del inverso aditivo tenemos que $-(\sum_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n (-a_i)$. $\square$

Nota: Si decimos ideal sin apellido hablaremos de un ideal bilatero.

Ejercicio 17.1. Sea A un anillo. Sean Δ un conjunto no vacío y $\Gamma = [1, m] \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito no vacío, sean $(I_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ y $(J_\beta)_{\beta \in \Gamma}$ familias de ideales de A no vacías. Sea S un subconjunto de A no vacío. Demostrar:

a) $\cap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha$ es un ideal de A .

Demostración. Primero demostraremos que la intersección es un subgrupo, demostrando sea de paso que la intersección arbitraria de subgrupos es un subgrupo. Luego, demostraremos que la intersección es un subanillo, demostrando sea de paso que la intersección arbitraria de subanillos es un subanillo. Finalizaremos demostrando que la intersección es un ideal.

Denotamos $K = \cap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha$. Por definición de intersección, tendremos (1).

$$x \in K \iff x \in I_\alpha \forall \alpha \in \Delta \tag{1}$$

1° Es un subgrupo. Para esta parte solo usaremos el hecho de que cada I_α es un subgrupo con la suma en A . Recordemos que para demostrar que es un subgrupo solo hace falta demostrar que es distinto de vacío y que la resta de dos elementos está dentro para cada dos elementos.

Como cada I_α es un subgrupo, entonces $0 \in I_\alpha$ para cada α . Luego, por (1) tenemos que $0 \in K$ y por lo tanto es distinto de vacío.

Si $x, y \in K$, debemos mostrar que $x - y \in K$. Por (1) tenemos que $x, y \in I_\alpha$ para cada α . Luego, $x - y \in I_\alpha$ para cada α por ser subgrupos. Por (1) tenemos que $x - y \in K$.

Concluimos que K es un subgrupo de A con la suma. Luego, la intersección arbitraria de subgrupos es un subgrupo.

2° Es un subanillo. Para esta parte solo usaremos el hecho de que cada I_α es un subanillo de A . Recordemos que habiendo demostrado que K es un subgrupo con la suma de A ,

solo hace falta demostrar que K es cerrado bajo multiplicación.

Si $x, y \in K$, por (1) tenemos que $x, y \in I_\alpha$ para cada α . Luego, $xy \in I_\alpha$ para cada α , ya que cada I_α es un subanillo. Por (1) tenemos que $xy \in K$.

Concluimos que K es un subanillo de A . Luego, la intersección arbitraria de subanillos es un subanillo.

3° Es un ideal. Recordemos que solo nos hace falta demostrar que K absorbe por izquierda y por derecha.

Si $x \in K$ y $r \in A$, mostraremos que $rx, xr \in K$. Por (1) tenemos que $x \in I_\alpha$ para cada α . Como cada I_α es un ideal, tendremos que $rx, xr \in I_\alpha$ para cada α . Por (1) tenemos que $rx, xr \in K$.

Concluimos que K es un ideal. $\square$

- b) $\sum_{\alpha \in \Delta} I_\alpha := \{ \sum_{i=1, j \in \Delta}^n a_i \in A \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n] \text{ existe algún } j \in \Delta \text{ tal que } a_i \in I_j \}$ es un ideal de A .

Demostración. Denotamos $K = \sum_{\alpha \in \Delta} I_\alpha$. Por nuestra definición, tenemos (2).

$$x \in K \iff x = \sum_{i=1}^n a_i \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n] \text{ existe algún } j \in \Delta \text{ tal que } a_i \in I_j \quad (2)$$

1° Es un subgrupo. Mostraremos que es distinto de vacío y la resta de sus elementos está dentro.

Como $(I_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ es una familia no vacía, existe $\alpha_1 \in \Delta$ tal que I_{α_1} es un ideal. Dado que es un ideal, tenemos que $0 \in I_{\alpha_1}$. Luego, $0 = \sum_{i=1}^1 0$; como $1 \in \mathbb{N}$ y $0 \in I_j$ con $j = \alpha_1$, tenemos por (2) que $0 \in K$.

Ahora sean $x, y \in K$. Por (2) tenemos que $x = \sum_{i=1}^l b_i$ e $y = \sum_{k=1}^m c_k$ tal que $l, m \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [1, l]$ existe $j \in \Delta$ con $b_i \in I_j$ y $\forall k \in [1, m]$ existe $j \in \Delta$ con $c_k \in I_j$. Del Lema 17.1. obtenemos que $-y = \sum_{k=1}^m (-c_k)$; si $c_k \in I_j$, entonces por ser I_j un ideal tendremos que $-c_k \in I_j$, por lo tanto para todo $k \in [1, m]$ existe $j \in \Delta$ con $-c_k \in I_j$. Ahora hacemos un cambio de variable, véase (3).

$$d_f = \begin{cases} b_f & \text{si } f \in [1, l] \\ -c_{f-l} & \text{si } f \in [1+l, m+l] \end{cases} \quad (3)$$

Con lo anterior tenemos que para todo $f \in [1, m+l]$ existe $j \in \Delta$ tal que $d_f \in I_j$, $x = \sum_{f=1}^l d_f$ y $-y = \sum_{f=1+l}^{m+l} d_f$. Obteniendo que $x - y = \sum_{f=1}^{m+l} d_f$; dado que $m+l \in \mathbb{N}$ y para todo $f \in [1, m+l]$ existe $j \in \Delta$ con $d_f \in I_j$, deducimos que $x - y \in K$.

Concluimos que K es un subgrupo con la suma de A .

2° Es un ideal. Mostraremos que absorbe por la izquierda y por la derecha.

Sea $r \in A$ y $x \in K$. Por (2) tenemos que $x = \sum_{i=1}^n a_i$ tal que $n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]$ existe algún $j \in \Delta$ tal que $a_i \in I_j$. Por distributividad tenemos que $rx = \sum_{i=1}^n ra_i$, $xr = \sum_{i=1}^n a_i r$; además sabemos que $\forall i \in [1, n]$ existe algún $j \in \Delta$ tal que $a_i \in I_j$, como todo I_j es un ideal, tendremos que $ra_i, a_i r \in I_j$ (con el correspondiente j). Luego, por (2) tenemos que $rx, xr \in K$.

Concluimos que K es un ideal. $\square$

- c) $\prod_{\beta \in \Gamma} J_\beta := \{ \sum_{i=1}^n a_{i,1} a_{i,2} \cdots a_{i,m} \in A \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n], a_{i,j} \in J_j \}$ es un ideal de A .

Demostración. Denotemos $K = \prod_{\beta \in \Gamma} J_\beta$. Por definición tenemos (4).

$$x \in K \iff x = \sum_{i=1}^n a_{i,1} a_{i,2} \cdots a_{i,m} \in A \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n], a_{i,j} \in J_j \quad (4)$$

1° Es un subgrupo. Mostraremos que es distinto de vacío y la resta de sus elementos está dentro.

Como cada J_β es un ideal, tendremos que $0 \in J_\beta$ para cada β . Luego, denotando $a_{1,1} = 0 = a_{1,2} = \dots = a_{1,m}$, vemos que $0 = \sum_{i=1}^1 a_{i,1}a_{i,2} \cdots a_{i,m} \in K$, ya que $a_{1,j} \in J_j$ para todo $j \in [1, m]$. Por lo tanto K es distinto de vacío.

Sean $x, y \in K$. Por (4) tendremos que $x = \sum_{i=1}^q b_{i,1} \cdots b_{i,m}$ tal que $q \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, q]$, $b_{i,j} \in J_j$ e $y = \sum_{k=1}^l c_{k,1} \cdots c_{k,m}$ tal que $l \in \mathbb{N} \wedge \forall k \in [1, l]$, $c_{k,j} \in J_j$. Dado que J_1 es un ideal y $c_{k,1} \in J_1$, seguimos teniendo que $-c_{k,1} \in J_1$ para todo k . Por lo anterior, el Lema 17.1. y el Lema 2. de la ayudantía 13 obtenemos que $-y = \sum_{k=1}^l (-c_{k,1})c_{k,2} \cdots c_{k,m} \in K$. Ahora hacemos un cambio de variable, véase (5).

$$d_{f,j} = \begin{cases} b_{f,j} & \text{si } f \in [1, q] \wedge j \in [1, m] \\ -c_{f-q,j} & \text{si } f \in [1+q, l+q] \wedge j = 1 \\ c_{f-q,j} & \text{si } f \in [1+q, l+q] \wedge j > 1 \end{cases} \quad (5)$$

Nos queda que $x = \sum_{f=1}^q d_{f,1} \cdots d_{f,m}$ tal que $\forall f \in [1, q]$, $d_{f,j} \in J_j$ y $-y = \sum_{f=1+q}^{l+q} d_{f,1} \cdots d_{f,m}$ tal que $\forall f \in [1+q, l+q]$, $d_{f,j} \in J_j$. Luego, $x - y = \sum_{f=1}^{l+q} d_{f,1} \cdots d_{f,m}$ tal que $l+q \in \mathbb{N} \wedge \forall f \in [1, l+q]$, $d_{f,j} \in J_j$. Por lo tanto $x - y \in K$.

Concluimos que K es un subgrupo con la suma de A .

2° Es un ideal. Demostraremos que K absorbe por la izquierda y por la derecha.

Sea $r \in A$ y $x \in K$. Por (4) tenemos que $x = \sum_{i=1}^n a_{i,1} \cdots a_{i,m}$ tal que $n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]$, $a_{i,j} \in J_j$. Por distributividad obtenemos que $rx = \sum_{i=1}^n (ra_{i,1})a_{i,2} \cdots a_{i,m}$ y $xr = \sum_{i=1}^n a_{i,1} \cdots a_{i,m-1}(a_{i,m}r)$. Dado que J_1 y J_m son ideales, tendremos que $ra_{i,1} \in J_1$ y $a_{i,m}r \in J_m$ para todo $i \in [1, n]$. Luego, $rx, xr \in K$.

Concluimos que K es un ideal. $\square$

- d) Si A es un anillo conmutativo y con unidad, $SA := \{\sum_{i=1}^n s_i a_i \in A \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]; s_i \in S, a_i \in A\}$ es un ideal que contiene a S .

Demostración. 1° Es un subgrupo.

Dado que S no es vacío, tendremos que existe $s \in S$. Además consideramos $0 \in A$. Tendremos que $0 = \sum_{i=1}^1 s \cdot 0 \in SA$, y por lo tanto SA es distinto de vacío.

Dejaremos la demostración de que es cerrado bajo suma e inversos aditivos para quien esté leyendo. Ayuda: Ver la demostración de los ejercicios precedentes.

Asumiendo que han demostrado lo anterior, concluimos que SA es un subgrupo bajo la suma de A .

2° Es un ideal. Dado que A es conmutativo, solo demostraremos que absorbe por la izquierda, ya que es equivalente a absorber por la derecha.

Sea $r \in A$ y $x \in SA$. Tendremos que $x = \sum_{i=1}^n s_i a_i$ tal que $n \in \mathbb{N}$ y $s_i \in S, a_i \in A$ para todo i . Luego, por distributividad y conmutatividad en la multiplicación, $rx = \sum_{i=1}^n r s_i a_i = \sum_{i=1}^n s_i (ra_i)$. Dado que $ra_i \in A$ para todo i , deducimos que $rx \in SA$.

Concluimos que SA es un ideal.

3° Contiene a S .

Sea $s \in S$, consideramos $1 \in A$. Tendremos que $s = \sum_{i=1}^1 s \cdot 1 \in SA$.

Concluimos que $S \subset SA$. $\square$

Ejercicio 17.2. Consideremos el anillo de los enteros con las operaciones usuales. Denotemos $I = I_1 = 4\mathbb{Z}$, $J = I_2 = 6\mathbb{Z}$ y $S = \{5\}$. Calcular:

- a) $I \cap J := \bigcap_{i \in [1,2]} I_i$.

Solución. Por el Problema 12.1. h) de la ayudantía 12 tenemos que $I \cap J = 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = MCM(4, 6)\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$. $\square$

b) $I + J := \sum_{i \in [1,2]} I_i = \{a + b \mid a \in I \wedge b \in J\}$.

Solución. Primero veamos algunos de los elementos del ideal.

$$\begin{aligned} 10 &= 4 + 6 \in I + J, 4 \in I \wedge 6 \in J \\ 20 &= 8 + 12 \in I + J, 8 \in I \wedge 12 \in J \\ 62 &= 20 + 42 \in I + J, 20 \in I \wedge 42 \in J \\ -6 &= 12 + (-18) \in I + J, 12 \in I \wedge -18 \in J \\ 0 &= (-12) + 12 \in I + J, -12 \in I \wedge 12 \in J \\ 2 &= 8 + (-6) \in I + J, 8 \in I \wedge -6 \in J \end{aligned}$$

Por el Problema 12.1. f) de la ayudantía 12 tenemos que $I + J = 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = MCD(4, 6)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ $\square$

c) $IJ := \prod_{i \in [1,2]} I_i = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n] a_i \in I, b_i \in J\}$.

Solución. Primero veamos como se ven algunos elementos de nuestro ideal.

$$\begin{aligned} 24 &= 4 \cdot 6 \in IJ \\ 48 &= 8 \cdot 6 + (-4) \cdot 24 \in IJ \\ 0 &= 12 \cdot 12 + (-12) \cdot 12 \in IJ \\ -240 &= 8 \cdot 18 + (-16) \cdot 24 \in IJ \end{aligned}$$

Nuestra tesis es que nuestro ideal es $24\mathbb{Z}$. Demostraremos por doble inclusión.

$\supset$. Dado que $24 \in IJ$, quien esté leyendo podrá verificar que $IJ \supset \{n \cdot 24 \mid n \in \mathbb{Z}\} = 24\mathbb{Z}$. Ahora la argumentación es más fuerte que cuando solo era un subgrupo, ya que al ser IJ un ideal, tendremos que absorbe. Deducimos que $IJ \supset 24\mathbb{Z}$

$\subset$. Si $x \in IJ$, por definición $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ tal que $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in 4\mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in [1, n]$. Luego, $a_i = 4s_i$ y $b_i = 6t_i$ para ciertos $n_i, t_i \in \mathbb{Z}$, lo anterior vale para todo i . Nos queda que $x = \sum_{i=1}^n 4s_i 6t_i = \sum_{i=1}^n 24s_i t_i = 24(\sum_{i=1}^n s_i t_i) \in 24\mathbb{Z}$. Deduciendo que $IJ \subset 24\mathbb{Z}$.

Concluimos que $IJ = 24\mathbb{Z}$. $\square$

d) SA .

Solución. Calculando tenemos que $SA = \{5\}\mathbb{Z} = \{\sum_{i=1}^n s_i a_i \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]; s_i \in S, a_i \in A\} = \{\sum_{i=1}^n 5a_i \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]; a_i \in A\} = \{5(\sum_{i=1}^n a_i) \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]; a_i \in A\}$. Dado que cualquier entero z lo podemos escribir de la forma $\sum_{i=1}^n a_i$, para algún $n \in \mathbb{N}$ y para algunos $a_i \in A$ [O sea, $\{5 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \{5(\sum_{i=1}^n a_i) \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]; a_i \in A\}$]; y dado que toda suma de la forma $\sum_{i=1}^n a_i$ pertenece a los enteros, con cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $a_i \in A$ [O sea, $\{5(\sum_{i=1}^n a_i) \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n]; a_i \in A\} \subset \{5 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$]. Tendremos que $SA = \{5 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z}$. $\square$

Nota: Usaremos que $[x] = x + Ker(\psi)$.

Ejercicio 17.3. Sean A y B anillos. Sea $\psi : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que $A/Ker(\psi) \cong Im(\psi)$.

Demostración. Consideraremos $\sigma : A/Ker(\psi) \rightarrow Im(\psi)$, $[x] \mapsto \psi(x) =: \sigma([x])$ y demostraremos que es un isomorfismo.

1° Está bien definida. Sean $[x], [y] \in A/Ker(\psi)$ tal que $[x] = [y]$, demostraremos que $\sigma([x]) = \sigma([y])$.

Por definición, $[x] = [y]$ si y solo si $x - y \in Ker(\psi)$. Lo anterior sucede si y solo si $\psi(x - y) = 0$. Dado que ψ es un homomorfismo de anillos (en particular, es un homomorfismo de grupos con la suma), lo anterior sucede si y solo si $\psi(x) - \psi(y) = 0$. Luego, lo anterior sucede si y solo si $\psi(x) = \psi(y)$. Que por definición de nuestra candidata, tenemos que sucede si y solo si $\sigma([x]) = \sigma([y])$.

En retrospectiva, $[x] = [y]$ si y solo si $\sigma([x]) = \sigma([y])$, y por lo tanto está bien definida nuestra ahora función.

2° Inyectividad. Con el si y solo si obtenido en 1°, basta percatarse que la definición de inyectividad está ahí. Luego, nuestra función es inyectiva.

3° Sobreyectividad. Demostraremos que si un elemento está en el codominio, entonces tiene una preimagen.

Sea $z \in Im(\psi)$. Por definición del conjunto, existe un $x \in A$ tal que $\psi(x) = z$. Luego, $\sigma([x]) = \psi(x) = z$ y por lo tanto $z \in Im(\sigma)$.

Concluimos que nuestra función es sobreyectiva.

4° Es un homomorfismo de grupos, con la suma.

Sean $[x], [y] \in A/Ker(\psi)$. Calculamos.

$$\begin{aligned} \sigma([x] + [y]) &= \sigma([x + y]) \\ &= \psi(x + y) \\ &= \psi(x) + \psi(y) \\ &= \sigma([x]) + \sigma([y]) \end{aligned}$$

Concluimos que es un homomorfismo de grupos con la suma.

5° Respeta la multiplicación.

Sean $[x], [y] \in A/Ker(\psi)$. Calculamos.

$$\begin{aligned} \sigma([x] \cdot [y]) &= \sigma([x \cdot y]) \\ &= \psi(x \cdot y) \\ &= \psi(x) \cdot \psi(y) \\ &= \sigma([x]) \cdot \sigma([y]) \end{aligned}$$

Concluimos que respeta la multiplicación.

6° Supongamos que $A/Ker(\psi)$ y $Im(\psi)$ tienen un neutro multiplicativo, entonces nuestra biyección manda el neutro al neutro.

Denotemos por 1 al neutro en $A/Ker(\psi)$ y por 1 al neutro en $Im(\psi)$. Por sobreyectividad de nuestra función, existe $x \in A/Ker(\psi)$ tal que $\sigma([x]) = 1$. Luego, calculamos y usamos el que nuestra función respeta la multiplicación, $\sigma([1]) = 1 \cdot \sigma([1]) = \sigma([x]) \cdot \sigma([1]) = \sigma([1 \cdot x]) = \sigma([x]) = 1$. Luego, $\sigma([1]) = 1$.

Concluimos que preserva el neutro.

Luego, efectivamente era un isomorfismo. □

Ejercicio para quien lea. Demostrar que nuestro σ anterior, es el único que cumple lo anterior y que $\psi = \sigma \circ \pi$. Donde $\pi : A \rightarrow A/Ker(\psi)$, $x \mapsto [x]$:

Ejercicio 17.4. Sea I un ideal de un anillo A . Entonces $S \mapsto S/I$ es una correspondencia 1-1 entre el conjunto de subanillos S que contienen a I y el conjunto de subanillos de A/I . Más aún, los ideales de A que contienen a I corresponden a los ideales de A/I .

Demostración. Probaremos que si S es un subanillo de A que contiene a I , entonces S/I es un subanillo de A/I . Además, probaremos que si K es un subanillo de A/I , entonces existe un subanillo S de A que contiene a I tal que $K = S/I$. O sea, además probaremos que todo subanillo de A/I tiene la forma S/I , donde S es un subanillo de A que contiene a I .

Por último probaremos la misma correspondencia de arriba, pero para los ideales que contienen a I . Es decir, si J es un ideal de A que contiene a I , entonces J/I es un ideal de A/I . De igual manera, si L es un ideal de A/I , entonces existe un ideal J de A que contiene a I tal que $L = J/I$. O sea, además probaremos que todo ideal de A/I tiene la forma J/I , donde J es un ideal de A que contiene a I .

1° Correspondencia de subanillo de izquierda a derecha. Si S es un subanillo de A , veremos que S/I es un subanillo de A/I . Para esto, veremos que I es un ideal de S y con eso que S/I es un anillo.

Como S es un subanillo de A , en particular tenemos que S es un anillo. Como I es un subgrupo con la suma de A , tendremos que es un subgrupo con la suma de S , ya que I está contenido en S y S es un subgrupo con la suma de A . Finalmente como I es un ideal de A , por definición tenemos que $rI \subset I \supset rI$ para todo $r \in A$. En particular, tendremos que $rI \subset I \supset rI$ para todo $r \in S$, y por ende I es un ideal de S .

Dado que I es un ideal del anillo S , tendremos que S/I es un anillo. Pero $S/I = \{x + I \mid x \in S\} \subset \{x + I \mid x \in A\} = A/I$, por lo tanto S/I es un subanillo de A/I .

2° Correspondencia de subanillo de derecha a izquierda. Si K es un subanillo de A/I , entonces existe un subanillo S que contiene a I tal que $K = S/I$. Para esto consideraremos la preimagen de K con π .

Sea $\pi : A \rightarrow A/I, x \mapsto x + I$. Quien lea podrá confirmar que π es un epimorfismo de anillo. Demostraremos que $\pi^{-1}(K) := \{a \in A \mid \pi(a) = a + I \in K\}$ es un subanillo de A , lo denotaremos por $S := \pi^{-1}(K)$. Debemos notar que por definición tenemos (6).

$$x \in S \iff \pi(x) = x + I \in K \quad (6)$$

Dado que K es un subanillo, tendremos que $0 + I \in K$. Como π es un homomorfismo, tendremos que $\pi(0) = 0 + I \in K$. Luego, por definición de S deducimos que $0 \in S$ y por lo tanto S no es vacío.

Sean $x, y \in S$. Luego, por (6) tenemos que $\pi(x), \pi(y) \in K$. Como K es un subanillo, tendremos que $\pi(x) - \pi(y), \pi(x) \cdot \pi(y) \in K$. Como π es un homomorfismo, tendremos que $\pi(x - y), \pi(x \cdot y) \in K$. Y por (6) obtenemos que $x - y, x \cdot y \in S$ y deducimos que S es un subanillo. Además, si $a \in I$, tendremos que $\pi(a) = a + I = 0 + I \in K$, por (6) tendremos que $a \in S$. Por lo tanto $I \subset S$.

Así por 1° tenemos que S/I es un subanillo de A/I , demostraremos que K/I es igual a S/I . Si $x + I \in S/I$, tendremos que $x \in S$; significa por (6) que $\pi(x) \in K$, es decir, $x + I \in K$. De ahí obtenemos que $S/I \subset K/I$. Para el otro lado, si $x + I \in K/I$, entonces $\pi(x) \in K$. Por (6) tendremos que $x \in S$ y por ende $x + I \in S/I$. De ahí obtenemos la otra inclusión, ahora podemos concluir que $K/I = S/I$, donde S es un subanillo de A que contiene a I .

Con 1° y 2° tenemos que K es un subanillo de A/I si y solo si existe un subanillo S de A , tal que S contiene a I y $S/I = K$.

3° Correspondencia de ideales de izquierda a derecha. Si J es un ideal de A que contiene a I , mostraremos que J/I es un ideal de A/I .

Como J es un ideal de A , en particular es un subanillo de A . Es un subanillo que además contiene a I . De 1° tendremos que J/I es un subanillo de A/I . Nos falta verificar que absorbe por

izquierda y por derecha.

Sea $r + I \in A/I$ y $x + I \in J/I$. Tenemos que $x \in J$. Como J es un ideal tenemos que $rx, xr \in J$. Obtenemos que $rx + I, xr + I \in J/I$. Por multiplicación en el anillo cociente tenemos que $(r + I)(x + I), (x + I)(r + I) \in J/I$ y por lo tanto, como eran elementos cualquiera, concluimos que J/I es un ideal de A/I .

4° Correspondencia de ideales de derecha a izquierda. Si K es un ideal de A/I , entonces existe un ideal S que contiene a I tal que $K = S/I$.

Como K es un ideal de A/I , en particular es un subanillo de A/I . Luego, por 2° existe un S subanillo de A que contiene a I tal que $K = S/I$. Sabiendo además que $S = \pi^{-1}(K)$. Demostraremos que S es un ideal de A . Como ya sabemos que es un subanillo, solo nos falta ver que absorbe por izquierda y por derecha.

Como K es un ideal de A/I , tendremos que $(r + I)(x + I), (x + I)(r + I) \in K$ para todo $r + I \in A/I$ y para todo $x + I \in K = S/I$. Luego, $(r + I)(x + I), (x + I)(r + I) \in K$ para todo $r \in A$ y para todo $x \in S$. Luego, $rx + I, xr + I \in K$, o sea, $\pi(rx), \pi(xr) \in K$. Así, por (6) tenemos que $rx, xr \in S$, y como dijimos arriba, se satisface para todo $r \in A$ y para todo $x \in S$. Concluimos que S es un ideal de A que contiene a I .

Con 3° y 4° tenemos que K es un ideal de A/I si y solo si existe un ideal S de A , tal que S contiene a I y $S/I = K$. $\square$

Ejercicios propuestos para la casita.

A continuación varios ejercicios para practicar. No se subirán las soluciones de estos ejercicios, pero siempre se puede consultar por correo cualquier duda.

Ejercicio 17.5. Sea A un anillo. Sea S un subconjunto de A no vacío. Denotamos por $[S]$ a la intersección de todos los ideales que contienen a S , lo llamamos ideal generado por S .

- Demstrar que $[S]$ es un ideal.
- Si A es un anillo conmutativo con unidad, demostrar que $SA = [S]$.
- Si A es un anillo conmutativo con unidad y $S = \{x\}$ con $x \in A$. Demostrar que $SA = \{xa \mid a \in A\}$.

Ejercicio 17.6. Sea A un anillo e I, J ideales de A . Demostrar que $IJ \subset I \cap J \subset I \subset I + J$. Mostrar ejemplos en los que las contenciones son estrictas.

Ejercicio 17.7. Considerar el anillo de los enteros con las operaciones usuales. Encontrar los ideales de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Hint: Usar el ejercicio 17.4.

Ejercicio 17.8. Sea A un cuerpo y B un anillo con unidad. Si $\psi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo (epimorfismo), demostrar que B es un cuerpo.

Ejercicio 17.9. Sea A un anillo. Sea I un ideal de A . Demostrar que m es un ideal maximal que contiene a I si y solo si m/I es un ideal maximal de A/I .

Hint: Usar ejercicio 17.4.

Ejercicio 17.10. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Sea I un ideal de A . Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

- a) I es un ideal maximal.
- b) $A = I + [x]$ para todo $x \in A \setminus I$.
- c) A/I es un cuerpo.

Nota: Si $S = \{x\}$, denotamos $[S] = [x]$.

Hint: Usar ejercicios anteriores.