Ayudantia 17

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 28 de Octubre 2022

Ejercicios propuestos para ayudantía.

Nota: Si decimos ideal sin apellido hablaremos de un ideal bilatero.

Ejercicio 17.1. Sea A un anillo. Sean Δ un conjunto no vacío y $\Gamma = [1, m] \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito no vacío, sean $(I_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ y $(J_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ familias de ideales de A no vacías. Sea S un subconjunto de A no vacío. Demostrar:

a) $\cap_{\alpha\in\Delta} I_\alpha$ es un ideal de A.

b) $\sum_{\alpha\in\Delta} I_\alpha := \{\sum_{i=1}^n a_i \in A \mid \forall i \in [1, n],\ \exists \alpha \in \Delta :\ a_i \in I_\alpha\}$ es un ideal de A.

c) $\prod_{\beta\in\Gamma} J_\beta := \{\sum_{i=1}^n a_{i,1}a_{i,2}\cdots a_{i,m} \in A \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, m],\ a_{i,j} \in I_j\}$ es un ideal de A.

d) Si A es un anillo conmutativo y con unidad, $SA := \{\sum_{i=1}^n s_i a_i \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in [1, n];\ s_i \in S,\ a_i \in A\}$ es un ideal que contiene a S.

Ejercicio 17.2. Consideremos el anillo de los enteros con las operaciones usuales. Denotemos $I = I_1 = 4\mathbb{Z}$, $J = I_2 = 6\mathbb{Z}$ y $S = \{5\}$. Calcular:

a) $I \cap J := \cap_{i\in[1,2]} I_i$.

b) $I + J := \sum_{i\in[1,2]} I_i$.

c) $IJ := \prod_{i\in[1,2]} I_i$.

d) SA.

Ejercicio 17.3. Sean A y B anillos con unidad. Sea $\psi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que $A/Ker(\psi) \cong Im(\psi)$.

Ejercicio 17.4. Sea I un ideal de un anillo A. Entonces $S \mapsto S/I$ es una correspondencia 1-1 entre el conjunto de subanillos S que contienen a I y el conjunto de subanillos de A/I. Más aún, los ideales de A que contienen a I corresponden a los ideales de A/I.

Ejercicios propuestos para la casita.

A continuación varios ejercicios para practicar. No se subirán las soluciones de estos ejercicios, pero siempre se puede consultar por correo cualquier duda.

Ejercicio 17.5. Sea A un anillo. Sea S un subconjunto de A no vacío. Denotamos por $[S]$ a la intersección de todos lo ideales que contienen a S, lo llamamos ideal generado por S.

a) Demostrar que $[S]$ es un ideal.

b) Si A es un anillo conmutativo con unidad, demostrar que $SA = [S]$.

c) Si A es un anillo conmutativo con unidad y $S = \{x\}$ con $x \in A$. Demostrar que $SA = \{xa \mid a \in A\}$.

Ejercicio 17.6. Sea A un anillo e I, J ideales de A. Demostrar que $IJ \subset I \cap J \subset I \subset I + J$. Mostrar ejemplos en los que las contenciones son estrictas.

Ejercicio 17.7. Considerar el anillo de los enteros con las operaciones usuales. Encontrar los ideales de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
Hint: Usar el ejercicio 17.4.

Ejercicio 17.8. Sea A un cuerpo y B un anillo con unidad. Si $\psi : A \to B$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo (epimorfismo), demostrar que B es un cuerpo.

Ejercicio 17.9. Sea A un anillo. Sea I un ideal de A. Demostrar que m es un ideal maximal que contiene a I si y solo si m/I es un ideal maximal de A/I.
Hint: Usar ejercicio 17.4.

Ejercicio 17.10. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Sea I un ideal de A. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) I es un ideal maximal.

b) $A = I + [x]$ para todo $x \in A \setminus I$.

c) A/I es un cuerpo.

Nota: Si $S = \{x\}$, denotamos $[S] = [x]$.
Hint: Usar ejercicios anteriores.