Estructuras Algebraicas
Ayudantia 16

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Lunes 24 de Octubre 2022

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\}$ y, para $f, g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se definen las funciones $f + g(x) := f(x) + g(x), f \cdot g(x) := f(x)g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $(C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), +, \cdot)$ es anillo. Demuestre además que los subconjuntos de funciones continuas y acotadas y de funciones diferenciables son subanillos.
   Por ultimo, en el caso de $n = 1$, ¿seguirá siendo anillo si cambiamos el producto $\cdot$ por la composición?
2. Sea R un anillo *ccu*, definimos $M_{n\times n}(R)$ como el anillo de matrices de n filas y n columnas con entradas en R. De ejemplos de ideales izquierdos, derechos y bilateros.
3. Sea R un anillo *ccu*. Se define $R^* := \{a \in R | \exists b : ab = 1\}$[1] y se conoce como las unidades de R.
   Sea $I \subset R$ un ideal. Demostrar que si $\exists a \in R^* : a \in I$, entonces $I = R$.
4. Consideremos $\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge i^2 = j^2 = k^2 = -1 \wedge ij = k\}$, mejor conocido como los cuaterniones de Hamilton. Encontrar **TODOS** los ideales de $\mathbb{H}$.
5. Sea R un anillo. Se define $R[x] := \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i | n \in \mathbb{N}_0 \wedge \{a_i\}_{i=0}^{n} \subset R\right\}$ y se conoce como el anillo de polinomios con coeficientes en R.
   Demuestre que R se inyecta en $R[x]$.
   Sea $\alpha \in R$. Demostrar que $\nu_\alpha : R[x] \to R, \nu_\alpha(f) := f(\alpha)$ es un homomorfismo de anillos epiyectivo.
6. Describir los cocientes:
   a) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$.
   b) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$.
   c) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$.
   d) $\mathbb{R}[x]/(x^2)$.
7. Si R es un anillo y $|R| < \infty$, entonces todo elemento de R es o una unidad o divisor de cero.

[1] en su tiempo libre puede demostrar que este cabro es un grupo con el producto de R