Ayudantia 8

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 23 de Septiembre 2022

Problema 8.1. Sea G un grupo y $N \triangleleft G$. Demostrar que G/N es abeliano si y solo si $aba^{-1}b^{-1} \in N$ $\forall a, b \in G$.

Demostración. Por definición de conmutatividad, G/N es abeliano si y solo si $(aN)(bN) = (bN)(aN)$ para todo $aN, bN \in G/N$. Lo anterior es equivalente a decir que $(aN)(bN) = (bN)(aN)$ para todo $a, b \in G$. Como los inversos de aN y bN son $a^{-1}N$ y $b^{-1}N$ respectivamente, lo anterior es equivalente a decir que $(aN)(bN)(a^{-1}N)(b^{-1}N) = id_G N$ para todo $a, b \in G$. Por la definición de multiplicación en el cociente, lo precedente es identico a señalar que $(aba^{-1}b^{-1})N = id_G N$ para todo $a, b \in G$. Una proposición de los tiempos pasados nos dice que lo anterior ocurre si y solo si $id_G^{-1}(aba^{-1}b^{-1}) \in N$, o sea, $aba^{-1}b^{-1} \in N$, lo que termina la demostración. $\square$

Problema 8.2. Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$. Sea $(a\,b\,c)$ un $3-$ciclo en S_n. Demostrar que existen $\tau, \sigma \in S_n$ tal que $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (a\,b\,c)$.

Demostración. Como $n \geq 5$, existen d, e tales que $\{d, e\} \cap \{a, b, c\} = \emptyset$ $(d, e \neq a, b, c)$. Así, podemos considerar $\tau = (b\,c\,d)$ y $\sigma = (e\,b\,a)$. Queda como ejercicio para el lector comprobar que $\tau^{-1} = (b\,d,\,c)$ y $\sigma^{-1} = (e\,a,\,b)$.

Sin nada más que esperar, calculamos y obtenemos que $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (b\,c\,d)(e\,b\,a)(b\,d\,c)(e\,a\,b) = (a\,b\,c)$. Por lo que concluimos la demostración. $\square$

Lema 1. $[S_n : A_n] = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}_{geq2}$.

Demostración. Sea $n \geq 2$ fijo. Recordamos que la definición del grupo alternante es $A_n = Ker(sgn : S_n \leftarrow \mathbb{Z}_2)$. Como $n \geq 2$, la función signo es sobreyectiva, y por el primer teorema de isomorfía tendremos que $\mathbb{Z}_2 \cong S_n/Ker(\cdots) = S_n/A_n$. Luego, $2 = |\mathbb{Z}_2| = |S_n/A_n| = [S_n : A_n]$. Lo que concluye la demostración. $\square$

Lema 2. Sea G un grupo. Sean $N \leq H \leq G$. Entonces $[G : N] = [G : H][H : N]$.

Demostración. Por el teorema de lagrange $[G : N] = \dfrac{|G|}{|N|}$.

Con un uno conveniente obtenemos que $\dfrac{|G|}{|N|} = \dfrac{|G|}{|N|} \cdot \dfrac{|H|}{|H|} = \dfrac{|G|}{|H|} \cdot \dfrac{|H|}{|N|}$. De nuevo por lagrange obtenemos que $\dfrac{|G|}{|H|} \cdot \dfrac{|H|}{|N|} = [G : H] \cdot [H : N]$. Igualando todo se concluye la demostración. $\square$

Problema 8.3 Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$.

a) Sea $H \triangleleft S_n$ tal que S_n/H es abeliano. Demostrar que $H = S_n$ o $H = A_n$.

   Demostración. Como S_n/H es abeliano, por el problema 8.1 conseguimos que $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in H$ para todo $\tau, \sigma \in S_n$. Del problema 8.2 deducimos que necesariamente todo $3-$ciclo pertenece a H. El lema1.106 de los apuntes de la clase, nos dice que A_n es generado por los $3-$ciclos; como H es un subgrupo es cerrado bajo multiplicación, y además dijimos que contiene a todos los $3-$ciclos; luego, $A_n \subset H$, o sea, $A_n \leq H$. Por el lema 1 y 2, tenemos que $2 = [S_n : A_n] = [S_N : H][H : A_n]$. Como 2 es primo, necesariamente $[S_n : H] = 1$ o $[H : A_n] = 1$, luego, $S_n = H$ o $H = A_n$. $\square$

b) Sea $H \triangleleft A_n$ tal que A_n/H es abeliano. Demostrar que $H = A_n$.

   Demostración. Como $n \geq 5$, tenemos que A_n es simple, esto significa que necesariamente $H = \{(1)\}$ o $H = A_n$.
   Pero $A_n/\{(1)\} \cong A_n$ que es no abelianos. Y $A_n/A_n \cong \{(1)\}$ que es abeliano. Luego, necesariamente por la hipotesis $H = A_n$. $\square$

c) Demostrar que S_n no es soluble para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$.

Demostración. Trabajaremos con la definición de solubilidad del ejercicio 1.96. de los apuntes de la clase.

Suposición 1: S_n es soluble. Esto significa que existe una filtración $\{(1)\} = G_t \subset G_{t-1} \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 = S_n$, donde $t \in \mathbb{N}$ y se satisface que para todo $i \in [1, t]$, $G_i \triangleleft G_{i-1}$ siendo G_{i-1}/G_i un grupo abeliano.
En particular, tendremos que $S_n/G_1 = G_0/G_1$ es un grupo abeliano. Por el problema 8.3 a), obtenemos que $G_1 = S_n$ o $G_1 = A_n$.

Suposición 2: Sea $r \in [1, t-1]$ fijo, $G_r = A_n$. Demostraremos que $G_m = A_n$ para todo $m \in [r, t]$ y por ende llegaremos a una contradicción.
Ocuparemos inducción en m.
Base inductiva. Por suposición 2 $G_r = A_n$, por lo que el caso base está verificado.
Hipotesís inductiva. $G_{m-1} = A_n$.
Tesis inductiva. $G_m = A_n$.
Demostración. Por la hipótesis inductiva y la suposición 1, tendremos que $A_n/G_m = G_{m-1}/G_m$ es un grupo abeliano. Luego, por el problema 8.3 b) deducimos que $G_m = A_n$.
Finalmenete, por inducción en $m \in [r, t]$, concluimos que $G_m = A_n$ para todo $m \in [r, t]$.

En particular, por lo anterior, tenemos que $G_t = A_n$, pero eso contradice la suposición 1 de que $G_t = \{(1)\}$. Luego, o la suposición 1 es falsa, o la suposición 2 es falsa. Si la suposición 1 es falsa se acaba la demostración, por lo que la demostración seguirá para el caso en que la suposición 2 es falsa.

Volviendo a la suposición 1, teniamos que $G_1 = S_n$ o $G_1 = A_n$. Como la segunda opción recae en la suposición 2 cuando $r = 1$, necesariamente $G_1 = S_n$. Demostraremos por inducción en m que $G_m = S_n$ para todo $m \in [1, t-1]$.
Base inductiva. Ya verificamos que $G_1 = S_n$.
Hipótesis inductiva. $G_{m-1} = S_n$.
Tesis inductiva. $G_m = S_n$.
Demostración. Por la hipótesis inductiva y la suposición 1, tendremos que $S_n/G_m = G_{m-1}/G_m$ debe ser un grupo abeliano. Por el problema 8.3 a) tendremos que $G_m = S_n$ o $G_m = A_n$, pero como $m \in [1, t-1]$, el segundo caso recae en la suposición 2 cuando $r = m$, por lo que necesariamente $G_m = S_n$.
Finalmenete, por inducción en $m \in [1, t-1]$, concluimos que $G_m = A_n$ para todo $m \in [1, t-1]$.

En particular, por lo anterior tendremos que $G_{t-1} = S_n$. Por la suposición 1 y el problema 5.4 de la ayudantía 5, tendremos que $S_n \cong S_n/\{(1)\} = G_{t-1}/G_t$ es un grupo abeliano, pero como $n \geq 5$, S_n no es un grupo abeliano, por lo que llegamos a una inevitable contradicción.

Luego, la suposición 1 siempre es falsa, o sea, S_n no es soluble. $\square$