Solucionario control 2

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 02 de Septiembre 2022

Ejercicio 0.1. Sea G un grupo actuando en un espacio X vía $(g, x) \mapsto g.x$. Si $Y \subset X$ y $g \in G$ anotamos $g.Y := \{g.y \mid y \in Y\}$.

1. Pruebe que $Stab_G(x)$ y $Stab_G(y)$ son conjugados (es decir existe $g \in G$ tal que $gStab_G(x)g^{-1} = Stab_G(y)$) si x e y pertenecen a la misma órbita.

Demostración. Comencemos desarrollando la hipotesis.
El que x e y pertenezcan a la misma órbita, significa que $\exists z \in X$ tal que $x, y \in Orb_G(z)$. Por definición de órbita, $\exists g_1, g_2 \in G$ tal que $g_1.z = x$ y $g_2.z = y$. De las igualdades anteriores, obtenemos las siguientes equivalencias, donde $(g_i, w) \in \{(g_1, x), (g_2, y)\}$.

$$g_i.z = w$$

Hacemos actuar g_i^{-1} en la igualdad.

$$g_i^{-1}.(g_i.z) = g_i^{-1}.w$$

Recordamos que por ser acción satisface asociatividad.

$$(g_i^{-1}g_i).z =$$

La multiplicación nos resulta el neutro.

$$id_G.z =$$

Finalmente, como el neutro del grupo preserva a los elementos de X tenemos.

$$z = g_i^{-1}.w$$

Luego, $z = g_1^{-1}.x$ y $z = g_2^{-1}.y$. Como nunca nos intereso z, es un gusto llegar a que $g_1^{-1}.x = g_2^{-1}.y$. Denotando $g = g_2g_1^{-1}$, conseguiremos las siguientes equivalencias.

$$\begin{aligned}
g_1^{-1}.x &= g_2^{-1}.y \\
&\quad \text{Hacemos actuar } g_2 \text{ en la igualdad.} \\
g_2.(g_1^{-1}.x) &= g_2.(g_2^{-1}.y) \\
&\quad \text{Usamos la asociatividad de la acción.} \\
(g_2g_1^{-1}).x &= (g_2g_2^{-1}).y \\
&\quad \text{Remplazamos por } g \text{ y usamos la preservación de los elementos de } X \text{ por el neutro.} \\
g.x &= id_g.y = y
\end{aligned}$$

Obteniendo $g.x = y$, donde g es algún elemento fijado de G. Demostraremos que sus estabilizadores son conjugados con ese g.

Demostraremos lo pedido con un hilo de igualdades. Por definición de estabilizador tenemos (1).

$$gStab_G(x)g^{-1} = g\{h \in G|h.x = x\}g^{-1} \tag{1}$$

Por definición de multiplicar elementos por un conjunto obtenemos (2).

$$g\{h \in G|h.x = x\}g^{-1} = \{ghg^{-1} \in G|h.x = x\} \tag{2}$$

Por definición de neutro conseguimos (3).

$$\{ghg^{-1} \in G|h.x = x\} = \{ghg^{-1} \in G|(h \cdot id_G).x = x\} \tag{3}$$

Por definición de inverso resulta (4).

$$\{ghg^{-1} \in G|(h \cdot id_G).x = x\} = \{ghg^{-1} \in G|(h(g^{-1}g)).x = x\} \tag{4}$$

Por asociatividad del grupo y de la acción llegamos a (5).

$$\{ghg^{-1} \in G | (h(g^{-1}g)).x = x\} = \{ghg^{-1} \in G | (hg^{-1}).(g.x) = x\} \tag{5}$$

Hacemos actuar g en la igualdad, y recordamos que $g.x = y$ para tener (6).

$$\{ghg^{-1} \in G | (hg^{-1}).(g.x) = x\} = \{ghg^{-1} \in G | g.[(hg^{-1}).y] = g.x\} \tag{6}$$

Por la asociatividad de la acción y el recordatorio anterior, nos encontramos con (7).

$$\{ghg^{-1} \in G | g.[(hg^{-1}).y] = g.x\} = \{ghg^{-1} \in G | (ghg^{-1}).y = y\} \tag{7}$$

Ahora, para cada $h \in G$ tal que $(ghg^{-1}).y = y$, podemos definir $k = ghg^{-1} \in G$ tal que $k.y = y$.
De manera análoga tenemos, que para cada $k \in G$ tal que $k.y = y$, podemos definir $h = g^{-1}kg \in G$ tal que $k = ghg^{-1}$ y por ende $ghg^{-1}.y = y$.
Con lo anterior, podemos hacer la igualdad de (8).

$$\{ghg^{-1} \in G | (ghg^{-1}).y = y\} = \{k \in G | k.y = y\} \tag{8}$$

Con la definicipon de estabilizador nos da (9).

$$\{k \in G | k.y = y\} =: Stab_G(y) \tag{9}$$

Igualando todas las ecuaciones anteriores, llegamos a que $gStab_G(x)g^{-1} = Stab_G(y)$, que era lo que nos pedian. □

2. Dado $g \in G$ definimos $Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$, el conjunto de puntos fijos de g. Muestre que para todo g, $f \in G$ vale que $Fix(fgf^{-1}) = f.(Fix(g))$.

Demostración. Mostraremos la igualdad de una manera similar a la demostración anterior. Para eso, fijaremos ciertos $g, f \in G$. Notamos que estos dos elmentos, pueden perfectamente ser cualquier elemento de G.

De la definición del conjunto de puntos fijos de g tenemos (10).

$$f.(Fix(g)) = f.(\{x \in X \mid g.x = x\}) \tag{10}$$

De la notación vista en el enunciado del ejercicio 0.1 obtenemos (11).

$$f.(\{x \in X \mid g.x = x\}) = \{f.x \in X \mid g.x = x\} \tag{11}$$

Por definición de neutro conseguimos (12).

$$\{f.x \in X \mid g.x = x\} = \{f.x \in X \mid (g \cdot id_G).x = x\} \tag{12}$$

Por definición de inverso encontramos (13).

$$\{f.x \in X \mid (g \cdot id_G).x = x\} = \{f.x \in X \mid (g(f^{-1}f)).x = x\} \tag{13}$$

Por la asociatividad del grupo y la asociatividad de la acción llegamos a (14).

$$\{f.x \in X \mid (g(f^{-1}f)).x = x\} = \{f.x \in X \mid (gf^{-1}).(f.x) = x\} \tag{14}$$

Hacemos actuar f en la igualdad para tener (15).

$$\{f.x \in X \mid (gf^{-1}).(f.x) = x\} = \{f.x \in X \mid f.[(gf^{-1}).(f.x)] = f.x\} \tag{15}$$

De nuevo usamos la asociatividad de la acción para deducir (16).

$$\{f.x \in X \mid f.[(gf^{-1}).(f.x)] = f.x\} = \{f.x \in X \mid (fgf^{-1}).(f.x) = f.x\} \tag{16}$$

Ahora, para cada $x \in X$ tal que $(fgf^{-1}).(f.x) = f.x$, podemos definir $y = f.x \in X$ tal que $(fgf^{-1}).y = y$.
De manera análoga tenemos, que para cada $y \in X$ tal que $(fgf^{-1}).y = y$, podemos definir $x = f^{-1}.y \in X$ tal que $y = f.x$ y por ende $(fgf^{-1}).(f.x) = f.x$.
Con lo anterior, podemos hacer la igualdad de (17).

$$\{f.x \in X \mid (fgf^{-1}).(f.x) = f.x\} = \{y \in X \mid (fgf^{-1}).y = y\} \tag{17}$$

Finalmente, de la definición del conjunto de puntos fijos de fgf^{-1}, concluimos (18).

$$\{y \in X \mid (fgf^{-1}).y = y\} = Fix(fgf^{-1}) \tag{18}$$

Igualando todas las ecuaciones anteriores, llegamos a que $Fix(fgf^{-1}) = f.(Fix(g))$, que era lo que nos pedian. □

Ejercicio 0.2 Sea $SL_2(\mathbb{R})$ el grupo de matrices 2×2, reales y con determinante 1 bajo multiplicación matricial. Sea $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid im(z) > 0\}$, el semi-plano complejo superior. Para $g \in SL_2(\mathbb{R})$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y $z \in \mathcal{H}$ definimos

$$g.z = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{19}$$

1. Demuestre que esto define una acción de $SL_2(\mathbb{R})$ en $\mathcal{H}$.

Demostración. Primero hay que verificar que la supuesta acción esté bien definida. Esto significa demostrar que para todo $g \in SL_2(\mathbb{R})$ y todo $z \in \mathcal{H}$, se tiene que $g.z \in \mathcal{H}$. Además de verificar que la regla de asignación no envía $g.z$ a dos elementos diferentes.

Dado que la regla de asignación depende absolutamente de como se escriben los elementos (los coeficientes de la matriz y el complejo enteriro), y no hay dos formas diferentes de escribir cada elemento (ya que las matrices se definin por sus coeficientes y esas operaciones están bien definidas para los complejos), necesariamente la regla de asignación no envía $g.z$ a dos elementos diferentes, porque es el resultado de operaciones entre complejos invariantes.

Ahora, sean $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ y $z = x + yi \in \mathcal{H}$ (con x e y números reales) fijos (pueden ser cualquiera), inmediatamente tendremos que $ad - bc = 1$ e $y > 0$. Demostraremos que $g.z \in \mathcal{H}$, esto significa demostrar que $g.z \in \mathbb{C}$ y $im(g.z) > 0$.

Como $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$ es el resultado de operar números complejos, este será un número complejo siempre y cuando $cz + d \neq 0$. Reordenando y remplazando tenemos que $cz + d = c(x + yi) + d = cx + cyi + d = (cx+d)+cyi$. Como $y > 0$, ese complejo es igual a cero si y solo si $c = 0$ y $cx+d = 0$, lo que es equivalente a decir que $c = 0$ y $d = 0$, pero de ocurrir eso tendríamos que $ad - bc = 0$. Luego, como $ad - bc = 1$, deducimos que $cz + d \neq 0$ y por ende $g.z \in \mathbb{C}$.

Para demostrar que $im(g.z) > 0$, primero debemos saber cual es la parte imaginaria de $g.z$. Para eso reordenamos y remplazamos.

$$\begin{aligned}
g.z &= \frac{az+b}{cz+d} \\
&= \frac{a(x+yi)+b}{c(x+yi)+d} \\
&= \frac{(ax+b)+ayi}{(cx+d)+cyi} \\
&= \frac{(ax+b)+ayi}{(cx+d)+cyi} \cdot \frac{(cx+d)-cyi}{(cx+d)-cyi} \\
&= \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2+[ay(cx+d)-cy(ax+b)]i}{(cx+d)^2+(cy)^2} \\
&= \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+(cy)^2} \cdot \frac{y[a(cx+d)-c(ax+b)]}{(cx+d)^2+(cy)^2} i
\end{aligned}$$

Ya identificada la parte imaginaria, probaremos que es mayor a cero. Sean $A = a(cx + d) - c(ax + b)$ y $B = (cx + d)^2 + (cy)^2$, tenemos que $im(g.z) = \frac{yA}{B}$. Como ya sabemos que $y > 0$, mostraremos que A, $B > 0$. Notamos que $A = a(cx + d) - c(ax + b) = acx + ad - cax - cb = ad - bc = 1 > 0$. Nos falta B, pero la suma de números reales al cuadrado es mayor o igual a cero, y la igualdad se da si y solo si $cx + d = 0$ y $cy = 0$, o sea, si y solo si $(cx + d) + cyi = 0$; un caso que descartamos más arriba. Por lo tanto, obtenemos que $im(g.z) > 0$ y concluimos que $g.z \in \mathcal{H}$. Como g y z eran cualquier elemento, esa conclusión se generaliza, es decir, la supuesta acción está bien definida.

En segundo lugar, probaremos que el neutro $id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{R})$ preserva los elementos de $\mathcal{H}$ cuando actúa sobre ellos. Esto quiere decir, $id.z = z \ \forall z \in \mathcal{H}$.

Sea $z \in \mathcal{H}$ (puede ser cualquiera) fijo. Por definición de la acción tenemos (20).

$$id.z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} \tag{20}$$

Calculamos y obtenemos (21).

$$\frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z \tag{21}$$

Luego, de (20) y (21) deducimos (22).

$$id.z = z \tag{22}$$

Dado que z puede ser cualquier elemento de $\mathcal{H}$, concluimos que el neutro del grupo preserva los elementos del conjunto. Por lo tanto, la supuesta acción cumple al menos una de las dos propiedades necesarias.

Por último, debemos probar la asociatividad. Eso quiere decir, $g_1.(g_2.z) = (g_1 g_2).z\ \forall (g_1,\, g_2,\, z) \in SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}$.

Sean $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),\ g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ y $z \in \mathcal{H}$ fijo. Por definición de la acción tenemos (23).

$$g_1.(g_2.z) \quad = \quad g_1.\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) \tag{23}$$

De nuevo por definición de la acción, obtenemos (24).

$$g_1.\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) = \frac{a_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + d_1} \tag{24}$$

Calculando conseguimos las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}
\frac{a_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + d_1} &= \frac{\frac{a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1 c_2 z + b_1 d_2}{c_2 z + d_2}}{\frac{c_1 a_2 z + c_1 b_2 + d_1 c_2 z + d_1 d_2}{c_2 z + d_2}} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}
\end{aligned}$$

Por definición de la acción nos resulta en (25).

$$\frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} = \begin{pmatrix} (a_1 a_2 + b_1 c_2) & (a_1 b_2 + b_1 d_2) \\ (c_1 a_2 + d_1 c_2) & (c_1 b_2 + d_1 d_2) \end{pmatrix}.z \tag{25}$$

Finalmente...por multiplicación matricial logramos (26).

$$\begin{pmatrix} (a_1 a_2 + b_1 c_2) & (a_1 b_2 + b_1 d_2) \\ (c_1 a_2 + d_1 c_2) & (c_1 b_2 + d_1 d_2) \end{pmatrix}.z = \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right].z \tag{26}$$

Dado que lo último es equivalente a $(g_1 g_2).z$, por las igualdades desde (23) hasta (26) deducimos que $g_1.(g_2.z) = (g_1 g_2).z$. Como eran cualquier elemento de sus respectivos conjuntos, concluimos que la supuesta acción satisface la asociatividad.

Luego, podemos decir que es una acción. Ya que está bien definida y cumple con la definición, o sea, satisface esas dos propiedades demostradas al final. ☐

2. Demuestre que la acción es transitiva, es decir hay una sola órbita.

Demostración. Primero veremos que $Orb_{SL_2(\mathbb{R})}(i) = \mathcal{H}$. Para ver eso, debemos probar que para todo $z \in \mathcal{H}$ existe $g \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $g.z = i$.

Primero que nada, nos aseguraremos que $i \in \mathcal{H}$, ya que de no ser así no tiene sentido hablar de su órbita. Ya sabemos que $i \in \mathbb{C}$, además $im(i) = 1 > 0$ por lo que concluimos que $i \in \mathcal{H}$. Ahora si, con seguridad podemos hablar de la órbita de i.

Sea $z \in \mathcal{H}$ fijo (puede ser cualquier elemento de $\mathcal{H}$), esto significa que $z = t + ai$ para algún $(t,\, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
Debemos encontrar un $g \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $g.i = z$.
Como $a > 0$, podemos considerar $\sqrt{a} \in \mathbb{R}^+$.

Como todo es real, consideramos $g = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & t \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$ una matriz 2×2 con coeficientes en los reales. Dado que $det(g) = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} - \left(t \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \cdot 0 = 1$, deducimos que $g \in SL_2(\mathbb{R})$.

Ya después de supuestamente haber encontrado nuestro g, solo nos queda calcular y comprobar que $g.i = z$. En (27) ocupamos la definición de nuestra acción, desde (28) hasta (31) desarrollamos la ecuación y en (32) recordamos como habíamos definido nuestro z.

$$\begin{aligned}
g.i &= \frac{\sqrt{a}\cdot i + t\cdot \dfrac{1}{\sqrt{a}}}{0\cdot i + \dfrac{1}{\sqrt{a}}} && (27)\\
&= \frac{\sqrt{a}\cdot i + t\cdot \dfrac{1}{\sqrt{a}}}{\dfrac{1}{\sqrt{a}}} && (28)\\
&= \left(\sqrt{a}\cdot i + t\cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\cdot \sqrt{a} && (29)\\
&= \left(\sqrt{a}\cdot i\right)\cdot\sqrt{a} + \left(t\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\cdot\sqrt{a} && (30)\\
&= ai + t = t + ai && (31)\\
&= z && (32)
\end{aligned}$$

Luego, $z \in Orb_{SL_2(\mathbb{R})}(i)$. Dado que z era cualquier elemento de $\mathcal{H}$, deducimos que $\mathcal{H} \subset Orb_{SL_2(\mathbb{R})}(i)$; y como por definición $Orb_{SL_2(\mathbb{R})}(i) \subset \mathcal{H}$, deducimos que $Orb_{SL_2(\mathbb{R})}(i) = \mathcal{H}$.
Finalmente, como las orbitas de una acción particionan el conjunto, concluimos que solo hay una órbita, y por ende, la acción es transitiva. □

Ejercicio 0.3. Sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo y sea $N \leq H$ un subgrupo. Demustre que $\varphi^{-1}(N) = \{g \in G \mid \varphi(g) \in N\}$, la imagen inversa de N bajo φ, es un subgrupo de G que contiene a $Ker(\varphi)$.

Demostración. Primero, probaremos que $ker(\varphi) \subset \varphi^{-1}(N)$.
Sea $z \in ker(\varphi)$, por definición del kernel $\varphi(z) = id_H$. Como N es un subgrupo de H, necesariamente $id_H \in N$. Luego, $\varphi(z) \in N$, y por definición de la imagen inversa de N bajo φ, necesariamente $z \in \varphi^{-1}(N)$.
Como z era cualquier elemento del kernel, concluimos que $ker(\varphi) \subset \varphi^{-1}(N)$.

En segundo lugar, probaremos que $\varphi^{-1}(N) \leq G$. Para eso, probaremos que es no vacío y es cerrado bajo la multiplicación y los inversos en G.
Como el kernel de φ es un subgrupo de G, necesariamente no es vacío. Y como la imagen inversa de N bajo φ contiene al kernel de φ, deducimos que $\varphi^{-1}(N) \neq \emptyset$.
Sean k, $h \in \varphi^{-1}(N)$. Probaremos que kh, $k^{-1} \in \varphi^{-1}(N)$.
Por la definición de nuestro conjunto, $\varphi(k)$, $\varphi(h) \in N$. Dado que N es un subgrupo de H, tenemos que $\varphi(k)\varphi(h)$, $[\varphi(k)]^{-1} \in N$. Dado que φ es un homomorfismo de grupos, deducimos que $\varphi(kh)$, $\varphi(k^{-1}) \in N$. Luego, por la definición de nuestro conjunto, concluimos que kh, $k^{-1} \in \varphi^{-1}(N)$. O sea, $\varphi^{-1}(N) \leq G$.

Así, acabamos de demostrar que la imagen inversa de N bajo φ es un subgrupo de G que contiene a $Ker(\varphi)$. □