Estructuras Algebraicas
Ayudantia 6

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Lunes 5 de Septiembre 2022

1. Sea G un grupo, X un conjunto y $G \curvearrowright X$ un acto. Demostrar que:
   - $y \in \text{Orb}(x) \Rightarrow g\text{Stab}(x)g^1 = \text{Stab}(y)$ para algún $g \in G$.
   - es fiel ssi el homomorfismo inducido $\varphi : G \to \text{Sym}(X)$ es inyectivo.
   - es libre ssi $\text{Stab}(x) = \{e\},\ \forall x \in X$.
   - es transitivo ssi $\text{Orb}(x) = X,\ \forall x \in X$.
2. Sea $G = C_2 \times C_2$ (conocido como el grupo de Klein), enumere los elementos de G y describa su imagen en S_4 bajo la representación regular izquierda.
   Repita lo anterior para la imagenes de S_3 en S_6, $D_{2\cdot 4}$ en S_8 y Q_8 en S_8.
3. Sea $X = \{1, \dots, n\}$, sea $T_k := \{S \in \mathcal{P}(X) : |S| = k\}$. Consideremos el siguiente acto de S_n en T_k, $\sigma.\{i_1, \dots, i_k\} = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$. Demostrar que $[S_n : \text{Stab}(S)] = \binom{n}{k},\ \forall S \in T_k$.
4. Sea G un $p-$grupo. Sea $G \curvearrowright X$, donde X es un conjunto finito.
   Consideremos $X^G := \{x \in X | g.x = x,\ \forall g \in G\}$. Demostrar que $|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$ y concluir que si $p \not| |X|$ entonces $X^G \neq \emptyset$.