Ayudantia 5

Profesor: Cristóbal Rivas
Ayudantes: Benajamin Martinez, Javier Pavez

Viernes 02 de Septiembre 2022

Problema 4.1: Sean G un grupo, X un conjunto, $g, g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$. Mostrar que no es una acción.

a) $G = (\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{Q}$, vía $g.x := \frac{x}{g}$.

Solución. Consideremos $g = 0$, $x = 1$. Obtenemos que $0.1 = \frac{1}{0}$, por lo que 0.1 no existe y el dominio esta mal definido. Luego, no es una acción. $\square$

b) $G = (\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{Q}$, vía $g.x := \frac{g}{x}$.

Solución. Consideremos $g = 1$, $x = 0$. Obtenemos que $1.0 = \frac{1}{0}$, por lo que 1.0 no existe y el dominio esta mal definido. Luego, no es una acción. $\square$

c) $G = (\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{Q}$, vía $g.x := \frac{1}{g+x}$.

Solución. Consideremos $g = 0$, $x = 0$. Obtenemos que $0.0 = \frac{1}{0+0}$, por lo que 0.0 no existe y el dominio esta mal definido. Luego, no es una acción. $\square$

d) $G = (\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{N}$, vía $g.x := g + x$.

Solución. Consideremos $g = -5$, $x = 1$. Obtenemos que $(-5).1 = -5 + 1 = -4 \notin \mathbb{N}$, por lo que el recorrido esta mal definido. Luego, no es una acción. $\square$

e) $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{Z}$, vía $g.x := g + x$.

Solución. Consideremos $[0] = g = [3]$, $x = 1$. Obtenemos que $[0].1 = 0 + 1 = 1 \neq 4 = 3 + 1 = [3].1$. Por lo que la regla de asignación esta mal definida. Luego, no es una acción. $\square$

f) $G = (\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{Q}$, vía $g.\frac{a}{b} := \frac{g+a}{x}$. (Acá estamos escribiendo todo racional como $\frac{a}{b}$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$).

Solución. Consideremos $g = 5$, $\frac{1}{2} = x = \frac{2}{4}$. Obtenemos que $5.\frac{1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \neq \frac{7}{4} = \frac{5+2}{4} = 5.\frac{2}{4}$, por lo que la regla de asignación esta mal definida. Luego, no es una acción. $\square$

g) $G = (\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{Z}$, vía $g.x := xg$.

Solución. Consideremos $g = 0 = id_G$, $x = 1$. Obtenemos que $0.1 = 0 \cdot 1 = 0 \neq 1$, por lo que no satisface la primera propiedad de la definición de acción. Luego, no es una acción. $\square$

h) $G = (\mathbb{Z}, +) \curvearrowright X = \mathbb{Q}$, vía $g.x := x^g$.

Solución. Consideremos $g_1 = 4$, $g_2 = 3$, $x = 2$. Obtenemos que $4.(3.2) = 4.2^3 = 4.8 = 8^4 = 4096 \neq 128 = 2^7 = 7.2 = (4+3).2$, por lo que no satisface la segunda propiedad de la definición de acción. Luego, no es una acción. $\square$

Problema 4.2: Consideremos $(S_3, \circ)$. Sean $H = \{(1), (12)\} \leq S_3$, $Y = \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$. Trabajemos con $S_3/H = \{(1)H, (123)H, (132)H\}$, que es un conjunto pero NO es un grupo. Sean $g_1, g_2, g \in S_3$, $xH \in S_3/H$ y $y \in Y$.

a) Demostrar que $S_3 \curvearrowright Y$, vía $g.y := g(y)$.

Demostración. (1°) Verificar que esté bien definida:

Dominio: Como todos los elementos de S_3 actúan sobre todos los elementos de Y sin indefinirse, deducimos que el dominio está bien definido. ✓

Recorrido: Como el resultado de que un elemento de S_3 actúe sobre un elemento de Y está en Y , el recorrido está bien definido. ✓

Regla de asignación: Como los elementos de S_3 son funciones, están bien definidas. Luego, la regla de asignación está bien definida. ✓

(2°) La identidad de S_3 preserva todos los elementos:

Recordemos que (1) es la función identidad. Luego, $(1).y = [(1)](y) = y$. Como y es cualquier elemento del conjunto Y , deducimos que si satisface la primera condición. ✓

(3°) Asociatividad:

Recordemos que como $(S_3, \circ)$ es grupo, se satisface la asociatividad entre todos sus elementos. Luego, $g_1.[g_2.y] = g_1.[g_2(y)] = g_1(g_2(y)) = (g_1 \circ g_2)(y) = (g_1 \circ g_2).y$. Como g_1, g_2 son cualquier elemento de S_3 y y es cualquier elemento de Y , deducimos que si satisface la segunda condición.

Concluimos que $S_3 \curvearrowright Y$, vía $g.y := g(y)$. □

b) Calcular las órbitas de todos los elementos de Y bajo S_3 .

Solución. Calculemos la órbita de 1 bajo S_3 . Para eso hacemos actuar todos los elementos de S_3 con 1:

$$(1).1 = [(1)](1) = 1.$$

$$(123).1 = [(123)](1) = 2.$$

$$(132).1 = [(132)](1) = 3.$$

Nos percatamos de que no hay más elementos en Y . Luego, $Orb_G(1) = \{1, 2, 3\} = Y$.

De manera similar se calculan las órbitas de 2 y 3. *Mutatis mutandis.* □

c) Calcular los estabilizadores sobre S_3 de todos los elementos de Y .

Solución. Calculemos el estabilizador de 1 sobre S_3 . Para eso hacemos actuar todos los elementos de S_3 con 1:

$$(1).1 = [(1)](1) = 1.$$

$$(123).1 = [(123)](1) = 2.$$

$$(132).1 = [(132)](1) = 3.$$

$$(23).1 = [(23)](1) = 1.$$

$$(12).1 = [(12)](1) = 2.$$

$$(13).1 = [(13)](1) = 3.$$

Luego, $Stab_G(1) = \{(1), (23)\}$.

De manera similar se calculan los estabilizadores de 2 y 3. *Mutatis mutandis.* □

d) Demostrar que $S_3 \curvearrowright S_3/H$, vía $g.xH := (g \circ x)H$.

e) Calcular las órbitas de todos los elementos de S_3/H bajo S_3 .

f) Calcular los estabilizadores sobre S_3 de todos los elementos de S_3/H .

Problema 4.3: Sean G, H grupos y $\check{u} \in Isom(G, H)$.

a) Demostrar o refutar: Sea $x \in G$ fijo, y por lo tanto $\check{u}(x) \in H$ fijo. Entonces $ord(\check{u}(x)) = ord(x)$. A la vez se dice que uno tiene orden infinito si y solo si el otro tiene orden infinito.

b) Encontrar tres subgrupos de orden seis, que no sean isomorfos entre sí.

Problema 4.4: Demostrar que $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\{0\}$. En general, si G es un grupo, demostrar que $G \cong G/\{id_G\}$.

Demostración. Demostraremos la generalización para todo grupo.

Consideramos la función identidad $Id : G \rightarrow G, x \mapsto x$. La función identidad es un automorfismo:

Como es inyectiva, $Ker(Id) = \{id_G\}$.

Como es sobreyectiva, $Im(Id) = G$.

Como es un homomorfismo de grupos, por el primer teorema de isomorfía para grupos, concluimos que $G \cong Im(Id)/Ker(Id) = G/\{id_g\}$. □