

Ayudantia 3

Viernes 19 de Agosto 2022

Problema 3.1: Consideremos Q_8 . Sea $H = \{1, -1, i, -i\} \subsetneq Q_8$.

a) Demostrar que $H \leq Q_8$.

Demostración. De manera evidente el conjunto H es no vacío, así solo falta mostrar que:

1° Todos sus elementos tienen su respectivo inverso dentro del grupo.

2° Es cerrado bajo multiplicación.

Esto lo haremos viendo la tabla de multiplicar.

$\cdot$	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Cuadro 1: Tabla de Cayley de H .

Podemos observar que (1°) se satisface, ya que: $\forall x \in H, \exists x^{-1} \in H$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Además (2°) se satisface porque los resultados de todas las multiplicaciones siguen estando en H .

Luego, H es subgrupo de Q_8 . □

b) Demostrar que $H \triangleleft Q_8$.

Demostración. Como Q_8 es un grupo finito, por el teorema de Lagrange obtenemos (1).

$$|Q_8| = |H| \cdot [Q_8 : H] \quad (1)$$

Remplazando en (1) las cardinalidades correspondientes, nos queda (2).

$$8 = 4 \cdot [Q_8 : H] \quad (2)$$

Y dividiendo por cuatro ambos lados en (2), deducimos (3).

$$[Q_8 : H] = 2 \quad (3)$$

Por el ejercicio 5. c) de la ayudantía 2, concluimos que $H \triangleleft Q_8$. □

c) Describir todas las clases laterales de H en Q_8 .

Como H es normal en Q_8 , las clases laterales izquierdas son iguales a las clases laterales derechas. Luego, calcularemos solo las clases laterales izquierdas. Multiplicando tenemos:

$$1H = \{1, -1, i, -i\} = -1H = iH = -iH.$$

$$jH = \{j, -j, k, -k\} = -jH = kH = -kH.$$

d) Escojer un conjunto de representantes para las clases laterales.

Arbitrariamente escojemos $\{1, j\}$.

e) Describir el grupo cociente Q_8/H .

Para describir el grupo, haremos su tabla de multiplicación.

$\cdot$	$1H$	jH
$1H$	$1H$	jH
jH	jH	$1H$

Cuadro 2: Tabla de Cayley de Q_8/H .

Problema 3.2: Sean G un grupo, $H \leq G$ y $g, k \in G$.

a) Demostrar que $gH = kH$ si y solo si $k^{-1}g \in H$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Tenemos que $k^{-1}g \in H$ y debemos demostrar que $gH = kH$.

Ahora, como $gH \cap kH \neq \emptyset$ si y solo si $gH = kH$. Y como $\emptyset \notin \{gH, kH\}$ ya que $g \in gH, k \in kH$.

Solo debemos demostrar que $gH \subset kH$.

Sea $x \in gH$.

Por definición de clase lateral $x = gh_1$, para algún $h_1 \in H$.

Luego, $x = gh_1 = id_G(gh_1) = (kk^{-1})(gh_1) = k((k^{-1}g)h_1)$.

Recordemos que $k^{-1}g, h_1 \in H$, como H es un subgrupo, obtenemos que $(k^{-1}g)h_1 \in H$.

Finalmente, $x = kh_2$ para algún $h_2 = (k^{-1}g)h_1 \in H$.

Y por definición de clase lateral, $x \in kH$.

Como x era cualquier elemento de gH , deducimos que $gH \subset kH$, que es lo que queríamos.

Concluimos que $gH = kH$.

($\Rightarrow$) Tenemos que $gH = kH$ y debemos demostrar que $k^{-1}g \in H$.

Como $gH = kH$, en particular $gH \subset kH$.

Notemos que $g \in gH$ ya que $g = g \cdot id_G \in gH$. ($id_G \in H$ porque $H \leq G$).

Luego, $g \in kH$.

Así, por definición de clase lateral, $g = kh_1$ para algún $h_1 \in H$.

Multiplicando k^{-1} por la izquierda en ambos lados de la igualdad, nos queda que $k^{-1}g = h_1 \in H$, que es lo que queríamos probar. $\square$

b) Sea $G = \mathbb{Z}$. Demostrar o refutar: El índice de H en $\mathbb{Z}$ es finito.

Demostración. Vamos a refutar el enunciado. Para eso debemos encontrar un $H \leq \mathbb{Z}$, tal que el índice de H en $\mathbb{Z}$ sea infinito.

Proponemos $H = 0\mathbb{Z} = \{0\}$, ahora debemos encontrar sus clases laterales.

Sea $g \in \mathbb{Z}$. Su clase lateral sería: $g + \{0\} = \{g + 0\} = \{g\}$. Como hay infinitos enteros, concluimos que $\{0\}$ tiene infinitas clases laterales. Luego, el índice de H en $\mathbb{Z}$ es infinito. $\square$

Problema 3.3: Sean $G, (H, *_H)$ grupos y $\check{u} \in Hom(G, H)$. Donde $Hom(G, H)$ esta dotado del producto puntual $*$: $\sigma = \psi * \varphi$ si y solo si $\sigma(g) = (\psi * \varphi)(g) := \psi(g) *_H \varphi(g), \forall g \in G$. Asumiremos que $(Hom(G, H), *)$ es un grupo. (Como siempre se omitirá el símbolo en la multiplicación).

a) Demostrar que $\check{u}(x^n) = [\check{u}(x)]^n, \forall (x, n) \in G \times \mathbb{Z}$.

Demostración. Demostraremos el enunciado solo para n un entero negativo, los demás casos quedan como ejercicio para el lector.

Sea $(x, -n) \in G \times \mathbb{N}$. Usaremos inducción sobre $-n$, considerando x fijo.

Base inductiva. Como $\check{u}$ es un homomorfismo, $\check{u}(x^{-1}) = [\check{u}(x)]^{-1}$. Luego, el caso base $-n = 1$ satisface el enunciado.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el enunciado se satisface para todo natural menor o igual a $-n$.

Tesis. El caso base se satisface para $-n + 1$.
 Por demostrar. $\check{u}(x^{n-1}) = [\check{u}(x)]^{n-1}$.

Demostración. Por propiedades de potencias tenemos (4).

$$\check{u}(x^{n-1}) = \check{u}(x^n x^{-1}) \quad (4)$$

Dado que $\check{u}$ es un homomorfismo, de (4) obtenemos (5).

$$\check{u}(x^n x^{-1}) = \check{u}(x^n) \check{u}(x^{-1}) = \check{u}(x^n) [\check{u}(x)]^{-1} \quad (5)$$

Por hipótesis de inducción, de (5) conseguimos (6).

$$\check{u}(x^n) [\check{u}(x)]^{-1} = [\check{u}(x)^n] [\check{u}(x)]^{-1} \quad (6)$$

De nuevo por propiedades de potencias, de (6) nos queda (7).

$$[\check{u}(x)^n] [\check{u}(x)]^{-1} = [\check{u}(x)]^{n-1} \quad (7)$$

Luego, $\check{u}(x^{n-1}) = [\check{u}(x)]^{n-1}$. Que era lo que queríamos probar.

Por lo tanto, como x era cualquier elemento de G y por principio de inducción, $\check{u}(x^n) = [\check{u}(x)]^n$ para todo $-n$ natural y para todo elemento de G . $\square$

b) Demostrar o refutar: $\text{ord}(\check{u}(x)) \mid \text{ord}(x)$, $\forall x \in T(G) := \{g \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}, g^n = e_G\}$.

Demostración. En lo que sigue, probaremos que el enunciado es verdadero.

Sea $x \in T(G)$, $\check{u}(x) \in H$. Definimos $n := \text{ord}(x)$, $m := \text{ord}(\check{u}(x))$.

Luego,

$$\check{u}(x^n) = \check{u}(id_G) = id_H \quad (8)$$

Usando el Problema 3.3 a), tenemos que $\check{u}(x^n) = [\check{u}(x)]^n$. Juntandolo con (8) nos queda (9).

$$[\check{u}(x)]^n = \check{u}(x^n) = \check{u}(id_G) = id_H \quad (9)$$

En particular, $[\check{u}(x)]^n = id_H$. Así, por definición de orden, $m \leq n$.

Ahora, por división en los naturales, $\exists t, r \in \mathbb{N}$ tal que $n = tm + r$ y $0 \leq r < m$. Remplazemos esta igualdad en (9).

$$id_H = [\check{u}(x)]^n = [\check{u}(x)]^{tm+r} \quad (10)$$

Por propiedades de potencias, de (10) llegamos a (11).

$$id_H = [\check{u}(x)]^{tm+r} = [[\check{u}(x)]^m]^t [\check{u}(x)]^r \quad (11)$$

Finalmente, de (11) obtenemos (12) por la definición de m .

$$id_H = [[\check{u}(x)]^m]^t [\check{u}(x)]^r = [id_H]^t [\check{u}(x)]^r = id_H [\check{u}(x)]^r = [\check{u}(x)]^r \quad (12)$$

Deduciendo, por definición de orden, que $r = 0$. Como x era cualquier elemento de $T(G)$, concluimos que $m \mid n$, o sea, $\text{ord}(\check{u}(x)) \mid \text{ord}(x) \forall x \in T(G)$. $\square$

c) Deducir que $\#Hom(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 1$.

Demostración. Sea $\varphi \in Hom(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Probaremos que ese φ (o sea cualquier elemento de ese conjunto) debe ser necesariamente la función que envía todo al neutro, la función trivial.

Sea $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tendremos que $\varphi(x) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Por el teorema de lagrange obtenemos (13) y (14), por el Problema 3.3 b) obtenemos (15).

$$\text{ord}(\varphi(x)) \mid |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}| \quad (13)$$

$$\text{ord}(x) \mid |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| \quad (14)$$

$$\text{ord}(\varphi(x)) \mid \text{ord}(x) \quad (15)$$

Remplazando la cardinalidad de los grupos en (13) y (14), y juntando (14) y (15), obtenemos (16) y (17).

$$\text{ord}(\varphi(x))/3 \quad (16)$$

$$\text{ord}(\varphi(x))/2 \quad (17)$$

Luego, necesariamente $\text{ord}(\varphi(x)) = 1$, pero esto pasa si y solo si $\varphi(x) = id_H$. Como x era cualquier elemento de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, deducimos que $\varphi(x) = id_H \forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Como φ era cualquier homomorfismo de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, concluimos que solo existe un homomorfismo, y este es el trivial. $\square$

Ejercicio para el lector: Considerando la hipotesis del problema 3.2. Demostrar o refutar: Si $x \in G$ tiene orden infinito $\implies \check{u}(x)$ tiene orden infinito.

Problema 3.4: Sean $(G, *_G)$, $(H, *_H)$ grupos. Considerar el grupo $(S = G \times H, *)$; $* : S \times S \longrightarrow S$, $(g_1, h_1) * (g_2, h_2) \longmapsto (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$. Demostrar que $G \times \{id_H\}$, $\{id_G\} \times H \triangleleft G \times H$ ¿Como son los elementos de $S/(\{id_G\} \times H)$? Conjeturar que $S/(\{id_G\} \times H) \cong G$.