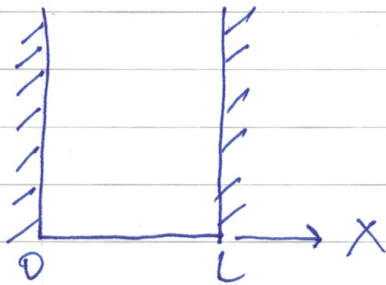


Problema:  $V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & \text{cero continuos} \end{cases}$



$$\psi(x) = 0 \quad x < 0; x > L$$

$$0 < x < L: -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = E \psi$$

$$\Rightarrow \psi''(x) + K^2 \psi(x) = 0, \text{ con } K^2 \equiv 2mE/\hbar^2$$

$$\Rightarrow \psi(x) = A e^{iKx} + B e^{-iKx}$$

$$0 = \psi(0) \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

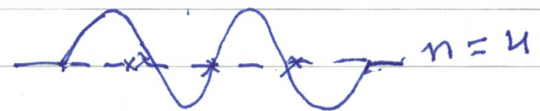
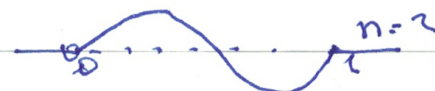
$$0 = \psi(L) \Rightarrow 0 = A e^{iKL} + B e^{-iKL} = A(e^{iKL} - e^{-iKL})$$

$$0 = +2iA \sin(KL) \Rightarrow KL = n\pi$$

$$K_n = n\pi/L$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 K_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$



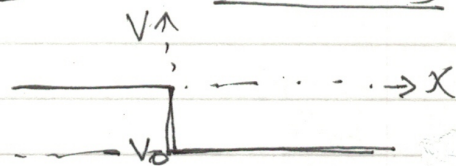
ojo:  $n(\text{mínimo}) = 1$  no  $\phi$ .

cuantización surgió al imponer que la función de onda sea cero en los bordes

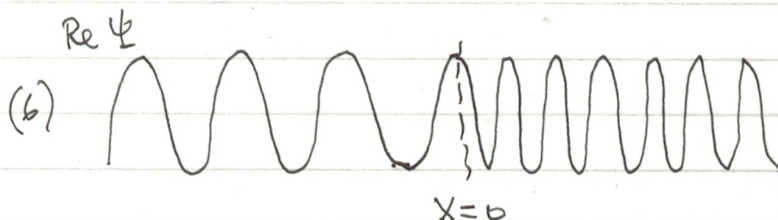
condiciones de borde.

pedimos que  $\psi$  sea finito. Luego si  $E$  y  $V$  son finitos,  $\psi''$  existe  $\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}$  y  $\psi$  son continuos. (aun si  $V$  es discontinua)

Ejemplo.  $V = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & x > 0 \end{cases}$



$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}}$$



$$\psi(x,t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \psi(x) \quad (7)$$

$$\Rightarrow E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x)\psi(x) \quad (8)$$

$x < 0$ :  $E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' \Rightarrow \psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$

o sea  $\psi'' + k_1^2 \psi = 0 \Rightarrow \psi(x) = A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_1 x} \quad (9)$

$x > 0$ :  $E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' - V_0 \psi \Rightarrow \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \psi = 0$

o sea,  $\psi'' + k_2^2 \psi = 0 \Rightarrow \psi(x) = C e^{i k_2 x} \quad (10)$

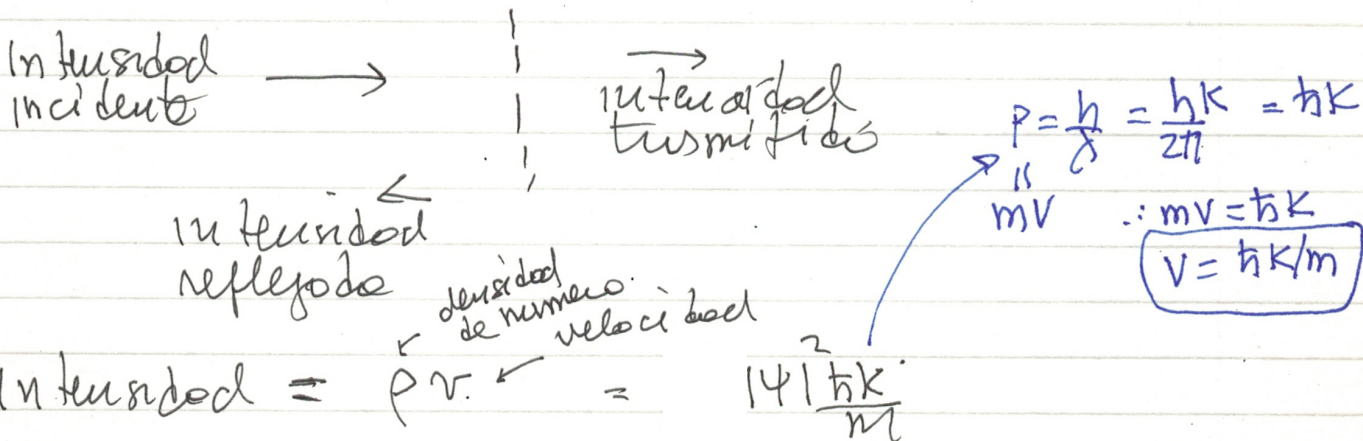
cont. de  $\psi$ ,  $A + B = C$

cont. de  $\psi'$ ,  $i k_1 A - i k_1 B = i k_2 C$

} (11)

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} ; \quad \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

### Coeffs. de transmisión y reflexión



Reflexión:  $R = \frac{|B|^2 (\hbar/m) k_1}{|A|^2 (\hbar/m) k_1} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (12)$

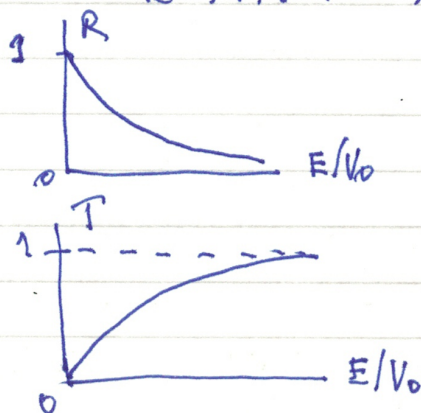
Transmisión:  $T = \frac{|C|^2 (\hbar/m) k_2}{|A|^2 (\hbar/m) k_1} = \frac{|C|^2 k_2}{|A|^2 k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (13)$

y se cumple,  $\boxed{R + T = 1} \quad (14)$

donde  $k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  y  $k_2 = \sqrt{2m/\hbar^2}(E + V_0)$

$$\Rightarrow R = \left( \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E + V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0}} \right)^2$$

$$T = \frac{4\sqrt{E}\sqrt{E + V_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0})^2}$$



No  $\exists$  cuantización de  $E$ .

## Paridad de los soluciones

Cuando  $V(x)$  es par, i.e.,  $V(-x) = V(x)$ , las autofm. poseen paridad definida, o sea son pares o impares.

Dem: 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \quad (1)$$

$$x \rightarrow -x$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(-x)}{dx^2} + V(-x) \psi(-x) = E \psi(-x) \quad (2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(-x)}{dx^2} + V(x) \psi(-x) = E \psi(-x) \quad (3)$$

O sea,  $\psi(x)$  y  $\psi(-x)$  satisfacen la misma ecuación y dado que sólo  $\exists$  una autofunción para un  $E$  dado

$$\Rightarrow \psi(-x) = c \psi(x) \quad (4)$$

en particular, para  $x$ , (4) queda

$$\psi(x) = c \psi(-x) = c^2 \psi(x) \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(-x) = \pm \psi(x)}$$

$$\text{Si } \psi(-x) = \psi(x) \rightarrow \psi(x) \text{ es PAR}$$

$$\text{Si } \psi(-x) = -\psi(x) \rightarrow \psi(x) \text{ es IMPAR}$$

## Numerical integration of the S. eqn

Caso simple:  $V(x) = V(x)$  (1)

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \psi(x) \quad (2)$$

Método primitivo:

$$\psi(x + \Delta x) \approx \psi(x) + \Delta x \psi'(x) + O(\Delta x)^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \psi'(x + \Delta x) \approx \psi'(x) + \Delta x \psi''(x) + O(\Delta x)^2 \quad (4)$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x.$$

$$\psi(x_1) \approx \psi(x_0) + \Delta x \psi'(x_0)$$

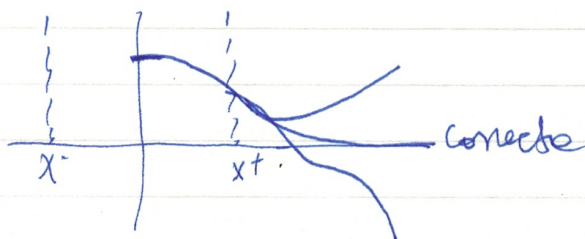
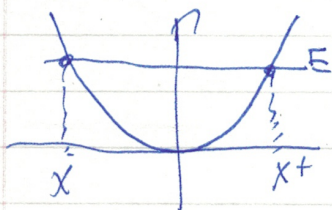
$$\psi'(x_1) \approx \psi'(x_0) + \Delta x \psi''(x_0)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \psi'(x_0) + \frac{2m}{\hbar^2} \Delta x (V(x_0) - E) \psi(x_0) \quad (5)$$

$x_0 = 0$ , y  $\psi(0)$  dado,  $\psi'(0)$  " Para E dado, integra desde  $x_0 = 0$  hasta  $x_f$ .

También usar Taylor de orden superior.

$$\psi(x+h) + \psi(x-h) = 2\psi(x) + h^2 \psi''(x)$$



## Auto funciones & Auto valores

→ tiene el aspecto  $\frac{\hat{p}^2}{2m}$  con  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

tiene la forma:

Operador x función = número x función

$$\boxed{H \psi = E \psi}$$

operador      autofunción      autovalor

ej: El operador  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  tiene como autofn.  $\psi = e^{ikx}$  ya que

$$\hat{p}_x \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = \hbar k e^{ikx} = \hbar k \psi$$

o sea el autovalor de  $\hat{p}_x$  es  $\hbar k$ .

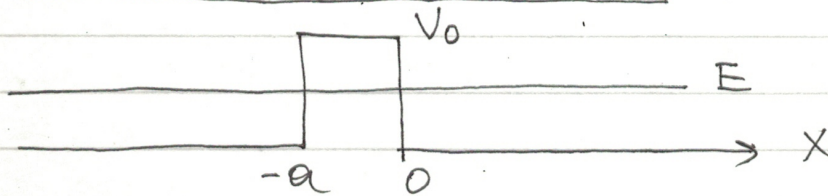
Consideremos  $\hat{L}_z = x \hat{p}_y - y \hat{p}_x = x (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial y} - y (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x}$

op. de momento angular =  $i\hbar [y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}]$

Postulado 1: Cualq. variable dinámica que describe el movimiento de una partícula puede ser representada por un operador. Las entidades observables son representadas por operadores hermiticos (autovalores reales)

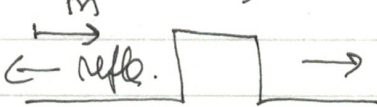
Postulado 2: El único resultado posible de la medición de una variable dinámica es uno de los autovalores del correspondiente operador. Después de la medición, el sist. queda en el estado que corresponde al autovalor medido.

## Penetración de barrera

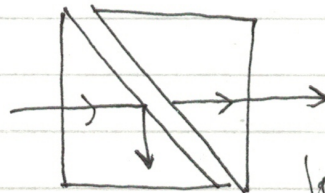
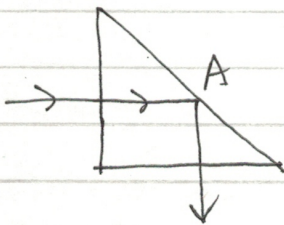


clásico: la partícula NO puede pasar si  $E < V_0$ .

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - V < 0 \text{ dentro de la barrera} \Rightarrow \text{momento imaginario!} \rightarrow t$$

cuánticamente: 

óptico: reflexión total interna.



los prismas se acoplan  
por los campos evanescentes