#2. Mov. de proyectil en Relatividad Especial.

Una partícula de masa m, lanzada con una veloc. inicial $v_0\hat{x}$, en presencia de una $\vec{F}$ externa constante $-F\hat{y}$. Encuentra $v_x(t)$ y $v_y(t)$ explícita como funciones de F, m y v_0. Demuestre analíticamente que $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} < c$ para cualquier instante.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\gamma v_x) = 0 \Rightarrow m\gamma v_x = \frac{m v_0}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} \equiv p_0$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma v_y) = -F \Rightarrow m\gamma v_y = -Ft$$

$$\therefore \quad \begin{matrix} m\gamma v_x = p_0 \\ m\gamma v_y = -Ft \end{matrix} \Rightarrow \frac{v_x}{v_y} = \frac{-p_0}{Ft} \Rightarrow \boxed{v_y = -\frac{Ft}{p_0}v_x}$$

$$\left.\begin{matrix} m^2\gamma^2 v_x^2 = p_0^2 \\ m^2\gamma^2 v_y^2 = (Ft)^2 \end{matrix}\right\} \quad m^2\gamma^2 v^2 = p_0^2 + (Ft)^2$$

but $m\gamma^2 v^2 = \dfrac{m v^2}{1-(v/c)^2} = (mc)^2(\gamma^2-1)$

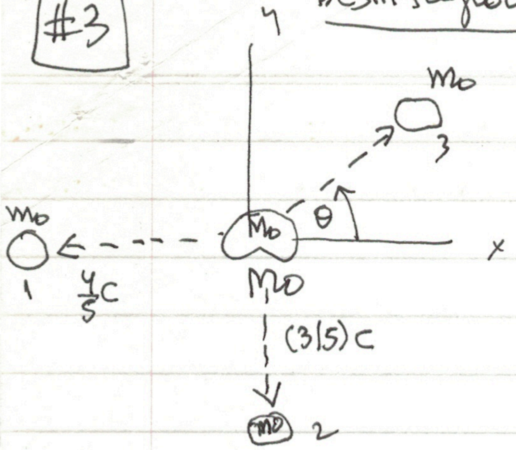
$$\Rightarrow (mc)^2(\gamma^2-1) = p_0^2 + (Ft)^2 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 = 1 + \left(\frac{p_0}{mc}\right)^2 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}$$

thus, $$v_x = \frac{p_0}{m\gamma} = \frac{p_0 c}{\sqrt{(mc)^2 + p_0^2 + (Ft)^2}}$$

$$v_y = \frac{-Fct}{\sqrt{(mc)^2+p_0^2+(Ft)^2}}$$

$$|\vec{v}| = c\left[\frac{p_0^2+(Ft)^2}{(mc)^2+p_0^2+(Ft)^2}\right]^{1/2} < c$$, regardless of t. indep. del signo de F.

#3 Desintegración de una partícula



$$M_0 \cancel{c^2} = m_0\gamma_1 \cancel{c^2} + m_0\gamma_2 \cancel{c^2} + m_0\gamma_3 \cancel{c^2}$$

$$\frac{M_0}{m_0} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3(\gamma_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_0\gamma_1 v_1 &= \cancel{m_0}\gamma_3 v_3 \cos\theta \\ m_0\gamma_2 v_2 &= \cancel{m_0}\gamma_3 v_3 \sin\theta \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\theta = \frac{\gamma_2 v_2}{\gamma_1 v_1} = \frac{v_2}{v_1}\left(\frac{1-(v_1/c)^2}{1-(v_2/c)^2}\right)^{1/2}$$

also, $\gamma_1^2 v_1^2 + \gamma_2^2 v_2^2 = \gamma_3^2 v_3^2 = \dfrac{v_3^2}{1-\left(\frac{v_3}{c}\right)^2} = -1 + \dfrac{1}{1-\left(\frac{v_3}{c}\right)^2}$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{v_3}{c}\right)^2 = \frac{1}{1+\left(\gamma_1 \frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\gamma_2 \frac{v_2}{c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_3}{c} = \left[\frac{\left(\gamma_1 \frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\gamma_2 \frac{v_2}{c}\right)^2}{1+\left(\gamma_1 \frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\gamma_2 \frac{v_2}{c}\right)^2}\right]^{1/2} < 1 \text{ always.}$$

$$\Rightarrow \gamma_3 = \sqrt{1+\left(\gamma_1 \frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\gamma_2 \frac{v_2}{c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m_0} = \gamma_1 + \gamma_2 + \left(1+\left(\gamma_1 \frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\gamma_2 \frac{v_2}{c}\right)^2\right)^{1/2}$$

using $v_1 = \frac{4}{5}c$; $v_2 = \frac{3}{5}c$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{M}{m_0} &= 4.74 \\ \frac{v_3}{c} &= 0.837 \\ \theta &= 29.4^\circ \end{aligned}}$$

Fisica contemporánea I

1. Demuestre rigurosamente que los siguientes procesos son imposibles:
   (a) Un solo fotón choca contra un electrón estacionario y le transfiere toda su energía.
   (b) Un solo fotón en el vacío es transformado en un electrón mas un positrón.
   (c) Un positrón rápido y un electrón estacionario se aniquilan mutuamente, produciendo un solo fotón.

2. Considere el decaimiento de un núcleo radiactivo en reposo por emisión de partículas alfa

$$X \to Y + \alpha \tag{1}$$

   Definimos la energá de desintegración Q como $Q \equiv (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2$. Esta energía debe ser compartida entre la partícula α y el núcleo Y con el objeto de conservar la energía y el momento del proceso de decaimiento. Encuentre una expresión para la energía cinética K_α en términos de Q y las masas en reposo de los núcleos.

$$\boxed{\begin{aligned} E_\gamma + mc^2 &= m\gamma c^2 \\ \frac{E_\gamma}{c} &= m\gamma v \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_\gamma + mc^2 &= m\gamma c^2 \\ E_\gamma &= m\gamma c v \end{aligned}}$$

$$\cancel{m}c^2 = \cancel{m}\gamma c^2 - \cancel{m}\gamma c v$$

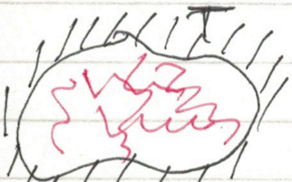
$$\cancel{c^2} = \gamma \cancel{c^2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$1 = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot 1-(v/c).$$

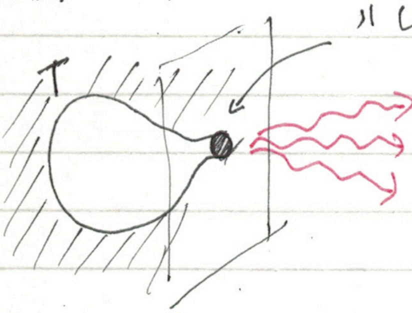
$$= \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{v}{c})\cancel{(1-\frac{v}{c})}}} \cancel{\sqrt{1-(v/c)}}\sqrt{1-(v/c)}$$

$$1 = \sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} < 1$$

La catástrofe Ultravioleta



cavidad metálica con paredes a temperatura $T \rightarrow$ radiación e.m. llena la cavidad



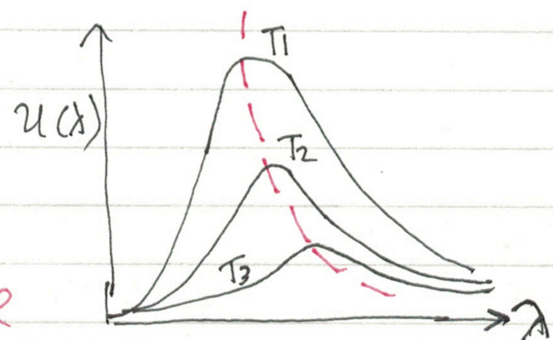
"cuerpo negro"

radiación de cuerpo negro.

obs. experimental:

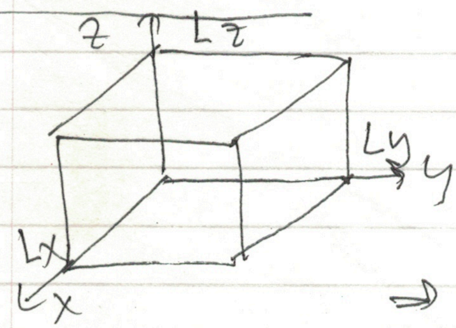
$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{cte.}{T}}$$

Ley de Wien (1893)



Teo. clásica de Rayleigh-Jeans

Cavidad cúbica:



$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \qquad (2)$$

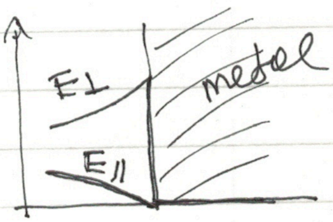
$$k^2 \equiv (\omega/c)^2 \qquad (3)$$

$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 E_i + k^2 E_i = 0 \qquad i = x, y, z$

$i = x: \quad \nabla^2 E_x(x,y,z) + k^2 E_x(x,y,z) = 0$

Separación de variables: $E_x(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$\Rightarrow X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k^2 XYZ = 0$



$$\Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{Dep de } X} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\text{Dep de } y} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\text{Dep de } Z} + k^2 = 0$$

$$X'' + k_x^2 X = 0$$
$$Y'' + k_y^2 Y = 0 \qquad \text{con } k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$
$$Z'' + k_z^2 Z = 0$$

<u>condicio. de borde</u>: $E_x(x,y,z) = 0$ en $Y = L_y$; $Y = 0$
$Z = 0$, $Z = L_z$

$$\Rightarrow X(x) = \cos(k_x x)$$
$$Y(y) = \sin(k_y y)$$
$$Z(z) = \sin(k_z z)$$

$\Downarrow$
$k_y L_y = n_y \pi$
$k_z L_z = n_z \pi$

$$\Rightarrow E_x(x,y,z) = A\cos(k_x x)\sin\left(\frac{n_y\pi}{L_y}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L_z}\right)$$

debe ser igual a $\frac{n_x\pi}{L_x}$

Análogamente,

$$E_y(x,y,z) = B\sin\left(\frac{n_x\pi}{L_x}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi y}{L_y}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{L_z}z\right)$$

que satisface: $E_y = 0$ en $X = 0 \wedge X = L_x$
$Z = 0 \wedge Z = L_z$

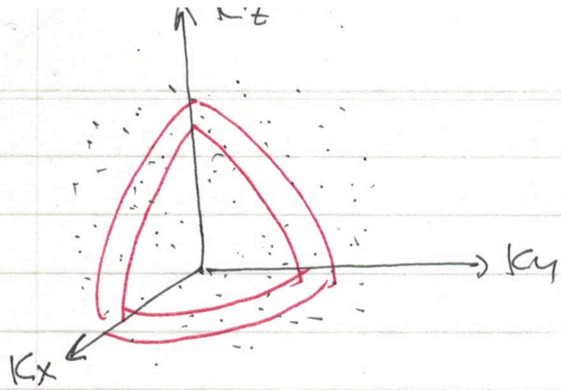
Finalmente, $E_z(x,y,z) = C \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right)$

que cumple: $E_z = 0$ en $x = 0 \wedge x = L_x$
$y = 0 \wedge y = L_y$

Aplicación de $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$\Rightarrow A n_x + B n_y + C n_z = 0$ → quedan 2 cts. libres
→ 2 modos l.i. de oscilación
(2 posible polarizaciones)

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$



¿cuántos modos permitidos $\exists$ entre $|\vec{k}|$ y $|\vec{k}|+d|\vec{k}|$?

$$\Delta k_x = \pi/L_x$$
$$\Delta k_y = \pi/L_y$$
$$\Delta k_z = \pi/L_z$$

$\Rightarrow$ cada modo ocupa un "volumen" $\pi^3/L_xL_yL_z = \pi^3/V$

$$n(k)\Delta k = \frac{\frac{1}{8}\, 4\pi k^2 \Delta k \times 2}{(\pi^3/V)} = \frac{V k^2 \Delta k}{\pi^2}$$

$$\boxed{n(k) = \frac{V k^2}{\pi^2}}$$

De $\omega = ck \Rightarrow d\omega = c\,dk$

$$\Rightarrow n(\omega)\,d\omega = n(k)\,dk \Rightarrow n(\omega) = \frac{n(k(\omega))}{(d\omega/dk)} = \frac{\left(\frac{V}{\pi^2}\right)\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}{c}$$

$$\boxed{\therefore\ n(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{V}{\pi^2 c}} \qquad (6)$$

Densidad de energía: $u(\omega) = n(\omega)\,\overline{E_\omega}$ (7)

Teo. clásica: prob. q' un oscilador tenga energía entre E y $E+dE$, si la temp. es T es:

$$p(E)dE = \frac{e^{-E/k_BT}\,dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_BT}\,dE} \qquad (8)$$

o sea, $$\bar{E}_\omega = \frac{\int_0^\infty E\, e^{-E/KT}}{\int_0^\infty e^{-E/KT}} = \mathbf{KT}$$

$$\Rightarrow u(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{V}{\pi^2 c} \cdot K_B T = \boxed{\frac{\omega^2 V K_B T}{\pi^2 c^3}} \qquad (9)$$

Fórmula de Rayleigh-Jeans

Energía total en la cavidad:

$$\frac{U}{V} = \frac{K_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega = \infty \qquad (10)$$