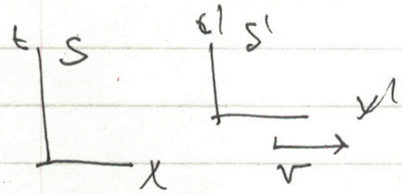
Ec. de transformación (entre S y S')

$x' = L_1(x,t)$ L1, L2 funcs. LINEALES

$t' = L_2(x,t)$ (Debido a que un obj. a veloc. cte. en S, debiera también tener veloc. cte. en S')

$$x = ax' + bt' \quad \text{con} \quad x' = ax - bt$$

debe reducirse al caso Galileano a bajas velocidades



$$x=0 \Rightarrow ax'+bt'=0 \Rightarrow ax'+bt'=0 \Rightarrow \frac{x'}{t'} = -\frac{b}{a} = \boxed{-v}$$ ← vel de S

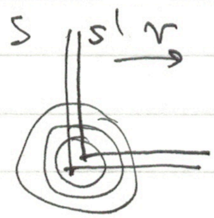
$$x'=0 \Rightarrow ax-bt=0 \Rightarrow ax=bt \rightarrow \frac{x}{t} = \frac{b}{a} = \boxed{v}$$

veloc. de S'

$$\boxed{v = b/a}$$

Si una señal de luz se origina en el origen de S: $x = ct$

Desde S': $x' = ct'$



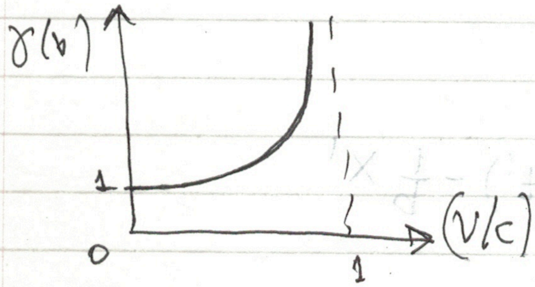
$$\Rightarrow \begin{cases} ct = act' + bt' \\ ct' = act - bt \end{cases} \Rightarrow ct' = c\left(a - \frac{b}{c}\right)t = ca\left(1 - \frac{v}{c}\right)t$$

$$ct = (ac+b)t' = (ac+b)a\left(1-\frac{v}{c}\right)t = a^2(c+v)\left(1-\frac{v}{c}\right)t$$

$$= a^2c\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)t = a^2ct\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{1-(v/c)^2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x'+vt') = \gamma(x'+vt') \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x-vt) = \gamma(x-vt) \\ \text{donde } \gamma(v) &\equiv \left(1-(v/c)^2\right)^{-1/2} \end{aligned}\right\} \text{Transf. de Lorentz}$$



<u>Ejercicio</u>: Dadas las T. de L, obtenga

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

Para las demás coordenadas, $y' = y$
$z' = z$

T. de los tiempos

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$\Rightarrow vt' = x\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) + \gamma v t$$

pero, $\frac{1}{\gamma} - \gamma = \sqrt{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad (\beta \equiv v/c)$

$$= \frac{-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\beta^2\gamma$$

$$\Rightarrow vt' = \gamma v t - \beta^2 \gamma x = \gamma(vt - \beta^2 x)$$

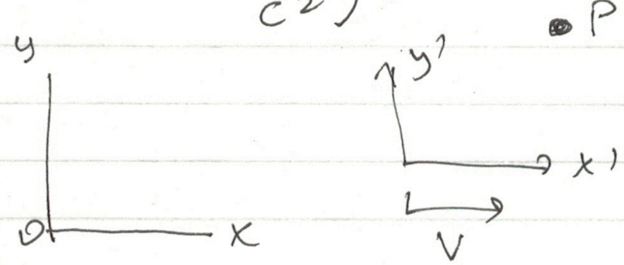
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{v}\left(\frac{v}{c}\right)^2 x\right)$$

$$\therefore \boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}$$

Transf. de velocidade

$$x = \gamma(x' + vt') \quad ; \quad y = y'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$



em S': $\quad u_x' = \dfrac{dx'}{dt'} \quad ; \quad u_y' = \dfrac{dy'}{dt'}$

$$dx = \gamma(dx' + v\,dt')$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\cancel{dt'}(u_x' + v)}{\cancel{dt'}\left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)}$$

$$\therefore \boxed{u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \boxed{\frac{u_y'/\gamma}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_y' = \frac{u_y/\gamma}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}}$$

igual para u_z'

EX 1: $u_x' = v = 0.5c$

$$u_x = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + (0.5)^2} = \frac{4}{5}c$$

En gral, si $v = \beta_1 c$ y $u_x' = \beta_2 c$ $(0 < \beta_1, \beta_2 < 1)$

$$\Rightarrow \frac{u_x}{c} = \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

$$\Rightarrow 1 - \beta = 1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{1 + \beta_1\beta_2 - \beta_1 - \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1 + \beta_1\beta_2}$$

o sea si $0 < \beta_1 < 1$ y $0 < \beta_2 < 1$ $\Rightarrow$ 1- beta > 0 —> beta <1

siempre.

En (S) se obs. q' un evento tome lugar en A sobre eje x i y 10^{-6} s después otro evento ocurre en B, loc. a 900 m de A.
Hallar magnitud y dirección de (S') c/r a (S) tq. ambos eventos aparezcan simultáneos.

A: $t_A = 0$, $x_A = 0$
B: $t_B = 10^{-6}$ s, $x_B = 900$ m

$$t_A' = \gamma\left(t_A - \frac{v x_A}{c^2}\right)$$

$$t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{v x_B}{c^2}\right)$$

$$\underbrace{t_B' - t_A'}_{0} = \gamma(t_B - t_A) - \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A)$$

$$t_B - t_A = \frac{v}{c^2}(x_B - x_A) \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{c(t_B - t_A)}{x_B - x_A} = \frac{1}{3}$$

Eventos

Evento 1: $x_1' = \gamma(x_1 - v t_1)$ $\qquad x_1 = \gamma(x_1' + v t_1')$

$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1\right)$ $\qquad t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'\right)$

Evento 2: $x_2' = \gamma(x_2 - v t_2)$ $\qquad x_2 = \gamma(x_2' + v t_2')$

$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2\right)$ $\qquad t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'\right)$

Luego,

$$x_2' - x_1' = \gamma\left[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\right]$$
$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right]$$

EX: sist. S' tiene veloc. v ($= 0{,}6c$) c/r a S. Se ajustan los relojes tq $t = t' = 0$ cuando $x = x' = 0$.

evento 1 ocurre en $x_1 = 10\,m$, $t_1 = 2 \times 10^{-7}$ secs $(y_1 = 0 = z_1)$

evento 2 ocurre en $x_2 = 50\,m$, $t_2 = 3 \times 10^{-7}$ secs, $(y_2 = 0 = z_2)$

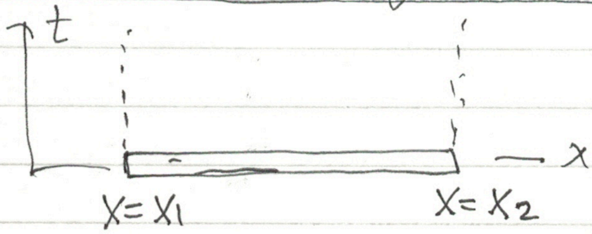
¿Cuál es la distancia entre ambos eventos, medidos en S'?

$(v/c)^2 = (9/25) \Rightarrow \gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2} = 5/4$

$\Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{5}{4}\left[(50 - 10) - \left(\frac{3}{5}\right) 3 \times 10^8 (3 - 2) 10^{-7}\right] = 27.5\ (m)$.

Contracción de longitudes

sist. S:



$l = x_2 - x_1$ (en el sist. en reposo)

¿cuál es la long. de la barra medida en otro sist. S'?

→ medir las posiciones de ambos extremos (x_1' y x_2') al mismo tiempo t' (medido en S')

$$l' = x_2' - x_1'$$

sabemos
$$x_1 = \gamma(x_1' + vt')$$
$$x_2 = \gamma(x_2' + vt')$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_2 - x_1}_{l} = \gamma\underbrace{(x_2' - x_1')}_{l'} \Rightarrow l' = \frac{l}{\gamma} = l\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} < l$$

Dilatación del tiempo: Sup. un reloj en reposo en $x = x_0$ en S.

evento 1: (x_0, t_1) "TIC"
evento 2: (x_0, t_2) "TAC"

¿Cómo se ve esto desde S'?

$$\left.\begin{aligned} t_1' &= \gamma\left(t_1 - \frac{v x_0}{c^2}\right) \\ t_2' &= \gamma\left(t_2 - \frac{v x_0}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{t_2' - t_1'}_{\Delta\tau'} = \gamma(t_2 - t_1)$$

$$\Delta\tau' = \gamma\,\Delta\tau > \Delta\tau$$

⇒ reloj parece correr "más lento" al ser observado desde S'.