

TALLER 12

FELIPE Y GARY

Aritmética y Combinatoria Taller 13

Problema 1

- Primero notemos que $3456 \equiv 116 \pmod{167}$ y que $116 = 4 \cdot 29$. Luego,

$$\left(\frac{3456}{167}\right) = \left(\frac{116}{167}\right) = \left(\frac{4}{167}\right) \cdot \left(\frac{29}{167}\right) = \left(\frac{29}{167}\right).$$

Ahora, como 29 es primo, por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que:

$$\left(\frac{29}{167}\right) \left(\frac{167}{29}\right) = (-1)^{\frac{29-1}{2} \cdot \frac{167-1}{2}} = 1.$$

Por tanto, $\left(\frac{29}{167}\right) = \left(\frac{167}{29}\right)$. Ahora, $167 \equiv 22 \pmod{29}$. Luego

$$\left(\frac{167}{29}\right) = \left(\frac{22}{29}\right) = \left(\frac{2}{29}\right) \cdot \left(\frac{11}{29}\right) = (-1)^{\frac{29^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{11}{29}\right) = -\left(\frac{11}{29}\right).$$

Por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{11}{29}\right) \left(\frac{29}{11}\right) = (-1)^{\frac{11-1}{2} \cdot \frac{29-1}{2}} = -1,$$

por ende $\left(\frac{29}{11}\right) = -\left(\frac{11}{29}\right)$. Ahora, $29 \equiv 7 \pmod{11}$, entonces

$$\left(\frac{29}{11}\right) = \left(\frac{7}{11}\right).$$

Por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{7}{11}\right) \cdot \left(\frac{11}{7}\right) = (-1)^{\frac{7-1}{2} \cdot \frac{11-1}{2}} = 1.$$

Luego $\left(\frac{7}{11}\right) = \left(\frac{11}{7}\right)$. Así concluimos que $\left(\frac{3456}{167}\right) = 1$ pues $11 \equiv 4 \pmod{7}$.

- A partir de ahora, haremos los cálculos sin tanta explicación. Primero

$$\left(\frac{2345}{997}\right) = \left(\frac{351}{997}\right) = \left(\frac{3^3}{997}\right) \cdot \left(\frac{13}{997}\right) = \left(\frac{3}{997}\right) \cdot \left(\frac{13}{997}\right).$$

Ahora, por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{3}{997}\right) \cdot \left(\frac{997}{3}\right) = 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{13}{997}\right) \cdot \left(\frac{997}{13}\right) = -1.$$

Luego,

$$\left(\frac{3}{997}\right) = \left(\frac{997}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

y

$$\left(\frac{13}{997}\right) = -\left(\frac{997}{13}\right) = \left(\frac{9}{13}\right) = -1.$$

Por lo tanto, $\left(\frac{2345}{997}\right) = -1$.

- Primero, la factorización prima de 1234 es $2 \cdot 617$. Luego

$$\left(\frac{1234}{4567}\right) = \left(\frac{2}{4567}\right) \cdot \left(\frac{617}{4567}\right) = (-1)^{\frac{4567^2-1}{8}} \left(\frac{617}{4567}\right) = \left(\frac{617}{4567}\right).$$

Por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{617}{4567}\right) \cdot \left(\frac{4567}{617}\right) = 1.$$

Por tanto,

$$\left(\frac{617}{4567}\right) = \left(\frac{4567}{167}\right) = \left(\frac{248}{617}\right) = \left(\frac{8}{617}\right) \cdot \left(\frac{31}{617}\right) = \left(\frac{2}{617}\right) \cdot \left(\frac{31}{617}\right) = \left(\frac{31}{617}\right).$$

Por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{31}{617}\right) \cdot \left(\frac{617}{31}\right) = -1.$$

Luego,

$$\left(\frac{31}{617}\right) = -\left(\frac{617}{31}\right) = -\left(\frac{28}{31}\right) = -\left(\frac{7}{31}\right).$$

Por teorema de reciprocidad cuadrática

$$\left(\frac{7}{31}\right) \cdot \left(\frac{31}{7}\right) = 1.$$

Luego,

$$-\left(\frac{7}{31}\right) = -\left(\frac{31}{7}\right) = -\left(\frac{-4}{7}\right) = -\left(\frac{-1}{7}\right),$$

donde este último símbolo es -1 pues $7 \equiv 3 \pmod{4}$. Por lo tanto, $\left(\frac{1234}{4567}\right) = 1$.

Problema 2

- Primero, la factorización prima de 5275 es $5^2 \cdot 211$. Por lo tanto, el símbolo de Jacobi $\left(\frac{5275}{2093}\right)$ es igual a $\left(\frac{211}{2093}\right)$. Por otro lado, $2093 = 7 \cdot 13 \cdot 23$ es la factorización prima. Por todo lo dicho anteriormente, tenemos que

$$\left(\frac{5275}{2093}\right) = \left(\frac{211}{7}\right) \cdot \left(\frac{211}{13}\right) \cdot \left(\frac{211}{23}\right) = \left(\frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{13}\right) \cdot \left(\frac{4}{23}\right) = \left(\frac{3}{13}\right).$$

Por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{3}{13}\right) \cdot \left(\frac{13}{3}\right) = -1.$$

Luego,

$$\left(\frac{3}{13}\right) = -\left(\frac{13}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Por lo tanto, el símbolo de Jacobi $\left(\frac{5275}{2093}\right) = -1$. En consecuencia, dado que 2093 es impar, 5275 no es un cuadrado módulo 2093 y la razón es porque 5275 no es un cuadrado módulo 13.

- Primero notemos que la factorización prima de es $13 \cdot 17 \cdot 19$. Luego,

$$\begin{aligned} \left(\frac{8453}{4199}\right) &= \left(\frac{8453}{13}\right) \left(\frac{8453}{17}\right) \left(\frac{8453}{19}\right) \\ &= \left(\frac{3}{13}\right) \left(\frac{4}{17}\right) \left(\frac{17}{19}\right) \\ &= \left(\frac{3}{13}\right) \left(\frac{17}{19}\right). \end{aligned}$$

Luego, por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{3}{13}\right) \left(\frac{13}{3}\right) = -1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{17}{19}\right) \left(\frac{19}{17}\right) = -1.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{3}{13}\right) = -\left(\frac{13}{3}\right) = -1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{17}{19}\right) = -\left(\frac{19}{17}\right) = -(-1)^{\frac{17^2-1}{8}} = -1.$$

Luego, el símbolo de Jacobi $\left(\frac{8453}{4199}\right) = 1$. Sin embargo, 8453 no es un cuadrado módulo 4199 pues 8453 no es un cuadrado módulo 17 ni módulo 19.

- La factorización prima de 15125 es $5^3 \cdot 11^2$. Luego, tenemos que

$$\left(\frac{9564}{15125}\right) = \left(\frac{9564}{5}\right)^3 \left(\frac{9564}{11}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{5}{11}\right)^2 = 1.$$

Ahora, dado que 9564 es congruente a 4 módulo 5, tenemos, por Lema de Hensel, que 9564 es un cuadrado módulo cualquier potencia de 5. Por otro lado, 9564 es congruente a 5 módulo 11 el cual no es un cuadrado módulo 11 pues, por teorema de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$\left(\frac{5}{11}\right) \left(\frac{11}{5}\right) = -1$$

por ende $\left(\frac{5}{11}\right) = -1$. Luego 9564 no puede ser un cuadrado módulo potencias de 11. Por lo tanto, 9564 no es un cuadrado módulo 15125.

Cálculo

Foro U-Cursos

Problema 1 Supongamos que f no es inyectiva. Luego, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) = f(b)$. Como la función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , por el Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Sin embargo, esto contradice la hipótesis

de que f tenga derivada positiva. De esta manera concluimos que f es inyectiva.

Notemos que esto no es cierto si f tiene al menos un punto en donde $f'(x) = 0$. Consideremos $f(x) = x^2$. Dado que $f'(x) = 2x$, se tiene que $f'(0) = 0$. Esta función claramente no es inyectiva, ya que $f(-1) = f(1)$. Por tanto, el enunciado es falso si relajamos tal hipótesis.

Problema 2 Como f no es inyectiva, existen $\alpha, \beta \in (a, b)$ tales que $\alpha < \beta$ y $f(\alpha) = f(\beta)$. Luego, como f es diferenciable en (a, b) , tenemos que f es continua en $[\alpha, \beta]$ y diferenciable en (α, β) . Por lo tanto, por el teorema del valor medio, existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tal que $f'(\gamma) = 0$.

Álgebra y Geometría I

Guía 3: Polinomios

Problema 4 Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado 3. Por un lado, supongamos que $p(x)$ tiene una raíz $a \in \mathbb{R}$, entonces $(x - a)$ divide a $p(x)$. Es decir, existe $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = (x - a)q(x)$. Esto implica que $p(x)$ es reducible.

Por otro lado, supongamos que $p(x)$ es reducible, entonces existen $q(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomios no constantes tales que $p(x) = q(x)s(x)$. Dado que $\deg(p(x)) = \deg(q(x)) + \deg(s(x))$, se tiene que $0 < \deg(q(x)) < 3$ y $0 < \deg(s(x)) < 3$. Así se tiene que $\deg(q(x)), \deg(s(x)) \in \{1, 2\}$. Notemos que no puede ocurrir que ambos polinomios tengan grado 2 simultáneamente. En efecto, pues de lo contrario, tendríamos

$$4 = \deg(q(x)) + \deg(s(x)) = \deg(p(x)) = 3.$$

Una contradicción. Esto implica que alguno de los dos polinomios debe tener grado 1. Luego, sin pérdida de generalidad, supongamos que $q(x)$ es de grado 1 y por tanto existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $q(x) = ax + b$ y $a \neq 0$. De esta manera, $p(x) = (ax + b)s(x)$ y de manera equivalente

$$p(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right)(as(x)).$$

Finalmente, $\frac{b}{a}$ es una raíz de $p(x)$, probando así lo querido.

Problema 7 Probemos que el polinomio $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es irreducible. Si fuese reducible debiese ser el producto de dos polinomios de grado 1 y por tanto basta con probar que no tiene raíces. El discriminante de este polinomio es $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8$. Dado que su discriminante es negativo sabemos que no tiene raíces en $\mathbb{R}$, por lo que es un polinomio irreducible. Luego, $p(x) = q(x)^5$ es la descomposición de $p(x)$ en irreducibles.

Para la otra parte, utilizando el Teorema del Binomio de Newton se tiene que

$$p(x) = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (3x^2 + 2x)^k.$$

Recurriendo nuevamente al Teorema del Binomio se tiene

$$p(x) = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 3^k x^{2k} 2^{k-j} x^{k-j} = \sum_{k=0}^5 \sum_{j=0}^k \binom{5}{k} \binom{k}{j} 3^k 2^{k-j} x^{3k-j}.$$

Nos interesan sólo los $k, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tales que $3k - j = 4$ y $j \leq k$. Notemos que $j = 3k - 4 \geq 5$ si $k \geq 3$. Luego, $k \leq 2$. Sin embargo, k no puede ser ni 0, ni 1. De esta manera, $k = 2$ y por consecuencia $j = 2$. Así, el factor que acompaña a x^4 es

$$\binom{5}{2} \binom{2}{2} 3^2 2^0 = 10 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 = 90.$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE CHILE