Ayudantías de Aritmética y Combinatoria

Javier Pavez, Sebastián Rosselot V

0.1. Ayudantía 11

1. Muestre que 2 es divisible por $(1+i)^2$ en $\mathbb{Z}[i]$.

2. Encuentre si es que existen $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ tales que sean coprimos pero sus normas sean iguales, Encuentre si es que existen $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ tales que sean coprimos con normas donde una es un múltiplo de la otra.

3. ¿Existen elementos en $a+bi, w+qi \in \mathbb{R}[i] - \mathbb{Q}[i]$ con b o q no cero tal que $(a+bi)(q+wi) \in \mathbb{Z}[i]$?

4. ¿Existen elementos en $a+bi, w+qi \in \mathbb{R}[i] - \mathbb{Q}[i]$ con $a, b, w, q \in \mathbb{I}$ tal que $(a+bi)+(w+qi) \in \mathbb{Z}[i]$?

5. Encontrar $\gcd(5+2i, 3+i)$.

6. Escriba $\gcd(5+2i, 3+i)$ como combinación lineal de $5+2i$ y $3+i$.

7. Encontrar $\gcd(-1+5i, -3+i)$.

8. Encuentre $\gcd(49+7i, -2+89i)$.

9. Para $x, w \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ y d un $\gcd(x, w)$, demuestre que cualquier otro máximo común divisor d' es un múltiplo de d por alguna de las unidades de $\mathbb{Z}[i]$.

10. Escriba todos los máximos común divisores de $49+7i$ y $-2+89i$ como combinación lineal de $49+7i$ y $-2+89i$.

11. Demostrar si un entero Gaussiano tiene norma par entonces es múltiplo de $i+1$.

12. Demostrar que el algoritmo de división euclidiana en $\mathbb{Z}[i]$ se detiene.

13. Sean $z, w \in \mathbb{Z}[i]$. Demostrar que si $z|w$, entonces $N(z)|N(w)$.

14. Dibujar los múltiplos de $2, i, 1+i$ y $-1+2i$ en $\mathbb{Z}[i]$ de norma menor o igual a 10.

15. Sea $x \in \mathbb{Z}[i]$. Demuestre que si $N(x)$ es primo en $\mathbb{Z}$, entonces x es primo en $\mathbb{Z}[i]$.

16. Demuestre que si $a \mid bc$ en $\mathbb{Z}[i]$ con a y b relativamente primos entonces $a \mid c$.

17. Demuestre que si $a \mid c$ y $b \mid c$ en $\mathbb{Z}[i]$ con a y b relativamente primos entonces $ab \mid c$.