

Problemas para el Control 5

1. Demuestre que si p es primo entonces $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.
2. ¿Se puede expresar 4,410,000,000 como suma de cuadrados? Justifique.
(*Hint:* $4,410,000,000 = 90000 \cdot 49000$).
3. ¿Se puede expresar 2022 como suma de cuadrados? Justifique.
(*Hint:* $2022 = 6 \cdot 337$).
4. Descomponer 588 en primos de Gauss.
5. Descomponer 1131 en primos de Gauss.
6. Descomponer 979 en primos de Gauss.
7. Encontrar un mcd de $12 - 5i$ y $99 + 66i$.
8. Encontrar un mcd de $11 + 13i$ y $1 + 18i$.
9. Encontrar todos los mcd de $8 + i$ y $14 - 5i$.
10. Demostrar que no hay divisores de 0 en $\mathbb{Z}[i]$.
11. Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}[i]$ tales que no existe $w \in \mathbb{Z}[i]$ que los divida simultáneamente. Demuestre que existen $a, b, c \in \mathbb{Z}[i]$ tales que $ax + by + cz = 1$.
12. Determinar cuantas soluciones tiene $x^2 + y^2 = 850$. Calcular una si es que las tiene.
(*Hint:* $850 = 25 \cdot 34$).
13. Determinar cuantas soluciones tiene $x^2 + y^2 = 18513$. Calcular una si es que las tiene.
(*Hint:* $18513 = 3 \cdot 17 \cdot 363$).
14. Determinar cuantas soluciones tiene $x^2 + y^2 = 11025$. Calcular una si es que las tiene.
(*Hint:* $11025 = 25 \cdot 21^2$).
15. Expresar $29 \cdot 21$ como suma de cuatro enteros cuadrados.